

Surfaces de Riemann et théorie des revêtements

Charles Favre



Bernhard Riemann

CMLS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, CNRS,
Université Paris-Saclay, 91128 Palaiseau Cedex, France
charles.favre@polytechnique.edu

Table des matières

Introduction	3
Notations	7
Chapitre A. Surfaces de Riemann	9
1. Fonctions holomorphes	9
1.1. Définition	9
1.2. Le théorème d'inversion locale analytique	11
1.3. Forme locale des applications holomorphes	12
1.4. Fonctions méromorphes	14
1.5. Le théorème des fonctions implicites analytiques	16
2. Surfaces de Riemann	17
2.1. Définitions générales	17
2.2. Applications holomorphes entre surfaces de Riemann	19
2.3. La sphère de Riemann	21
2.4. Les courbes elliptiques	23
2.5. Sous-variétés du plan affine	25
2.6. Surfaces de Riemann simplement connexes	27
3. Action de groupe sur les surfaces de Riemann	30
3.1. Action de groupe	31
3.2. Quotient d'une surface de Riemann	32
3.3. Exemples	37
Bibliographie	39
Exercices	40
Chapitre B. Groupe fondamental et Théorie des revêtements	45
1. Le groupe fondamental	45
1.1. Définition	45
1.2. Espaces simplement connexes	49
1.3. Le groupe fondamental du cercle	52
1.4. Quelques applications frappantes	55
1.5. Rétraction et fonctorialité	58
1.6. Exemples et équivalence d'homotopie	60
2. Revêtements	62
2.1. Définitions et exemples	62

2.2.	Revêtements et surfaces de Riemann	64
2.3.	Revêtements et actions de groupes	65
2.4.	Relèvement des applications	67
2.5.	Revêtement universel	69
2.6.	Classification des revêtements : correspondance de Galois	72
2.7.	Revêtements galoisiens	74
2.8.	Uniformisation des surfaces de Riemann	77
2.9.	Correspondance de Galois des revêtements galoisiens	78
2.10.	Action du groupe fondamental sur les fibres	78
2.11.	Groupe fondamental et théorie de Galois	80
	Bibliographie	81
	Exercices	82
	Chapitre C. Surfaces de Riemann compactes	89
1.	Classification topologique des surfaces de Riemann compactes	89
2.	Groupe fondamental des surfaces de Riemann compactes	91
2.1.	Rappel sur les groupes libres	91
2.2.	Le Théorème de Van Kampen	94
2.3.	Groupe fondamental des surfaces compactes	96
2.4.	Triangulation des surfaces de Riemann compactes	97
2.5.	Démonstration du Théorème 1.1	101
2.6.	Le théorème de Riemann-Hurwitz	104
3.	Construction de surfaces de Riemann compactes	108
3.1.	Surface de Riemann compacte associée à un polynôme à deux variables	108
3.2.	Autres types de construction	110
4.	Formes différentielles holomorphes	111
4.1.	Formes méromorphes	111
4.2.	Intégration des formes holomorphes	112
4.3.	Opérations sur les formes méromorphes	112
4.4.	Genre et formes méromorphes	113
	Bibliographie	115
	Exercices	116
	Index	119

Introduction

Ce cours est construit comme une invitation à la théorie des surfaces de Riemann et à la topologie algébrique, deux thématiques qui ont pris leur essor de manière simultanée au début du XX^{ème} siècle sous l'impulsion de nombreux mathématiciens illustres comme Riemann, Klein, Poincaré, Koebe, Betti, Brouwer, Weyl, Dehn, et bien d'autres encore.

Les surfaces de Riemann sont obtenues en "recollant" des ouverts du plan complexe par des applications holomorphes, et sont les objets sur lesquels la notion de fonction holomorphe est bien définie. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux surfaces de Riemann compactes, et explorerons quelques aspects topologiques de ces surfaces.

Les intégrales de chemins jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions holomorphes élaborées par exemple par Cauchy. Or, ces intégrales ne dépendent pas uniquement des points source et but d'un chemin donné. C'est pour comprendre ce phénomène que l'on s'est petit à petit intéressé aux lacets sur une surface de Riemann et à leurs déformations, ce qui a amené Poincaré à dégager la notion de groupe fondamental en 1895.

Nous introduirons cet outil algébrique dans le cadre des espaces topologiques. Le groupe fondamental est une manière "d'algébriser" la topologie, ou tout du moins de réduire l'extraordinaire complexité d'un espace topologique à un groupe qui est calculable. Nous verrons par exemple que le calcul du groupe fondamental du cercle mène déjà à plusieurs résultats non triviaux comme le théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2.

Nous poursuivrons en étudiant la notion soeur de revêtement, notion qui permet de comprendre les sous-groupes du groupe fondamental d'un espace topologique donné.

Une fois toutes ces techniques mises en place, nous nous attaquerons à la description de la topologie d'une surface de Riemann compacte. On verra qu'une telle surface est toujours homéomorphe à un tore à $g \geq 0$ trous. L'entier g est appelé le genre de la surface. Le calcul du groupe fondamental d'une surface nous amènera à une première interprétation combinatoire du genre en termes de caractéristique d'Euler.

Nous concluerons ces notes en donnant (sans preuve) une interprétation du genre en termes de dénombrement d'objets *holomorphes*. Cette identité entre une quantité topologique et une quantité holomorphe est un résultat d'une profondeur

tout à fait extraordinaire. Il est le premier et le plus simple exemple de toute une série de théorème analogues, qui apparaissent en dimension plus grande (théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch) ou dans des contextes "algébriques" (théorème de Grothendieck-Riemann-Roch), ou "différentiables" (théorèmes d'indice de Atiyah-Singer).

◇

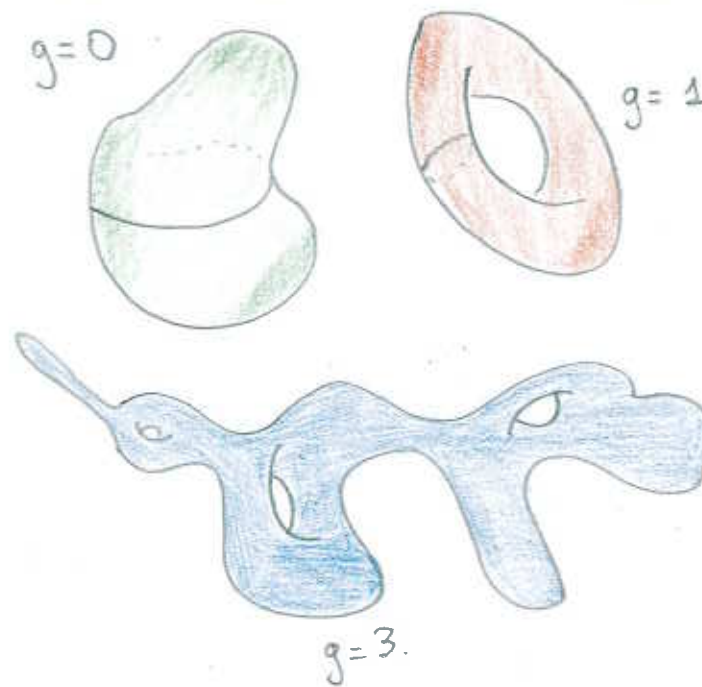


FIGURE 1. Exemples de surfaces compactes

Le cours est découpé en trois parties. La première est consacrée à un bref rappel sur les fonctions holomorphes puis à la définition de surface de Riemann. Nous construirons toute une série d'exemples afin de nous familiariser avec cette notion. Le second chapitre contient une introduction au groupe fondamental ainsi qu'à la théorie des revêtements. Dans le troisième chapitre, on décrit la topologie des surfaces de Riemann compactes, en en donnant une classification à homéomorphisme près. On introduit ensuite la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces, et on discute l'interprétation du genre mentionnée ci-dessus. Un résumé plus précis de chaque chapitre est donné au début de chacun d'entre eux.

◇

Ces notes sont pensées comme une aide au cours. Des références sont indiquées à la fin de chaque chapitre. Celles-ci sont choisies avec soin, et il ne faut jamais hésiter à les consulter pour obtenir un éclairage différent sur une notion ou sur une démonstration. Elles contiennent de plus de nombreux autres développements, soit sur la théorie des surfaces de Riemann, soit en topologie algébrique.

Notations

\mathbb{C} le corps des nombres complexes.

$\Re(z)$ la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$; $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

df la différentielle d'une fonction.

$\mathbb{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r .

$\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$ le disque fermé de centre z_0 et de rayon r .

$\mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1)$ le disque unité ouvert.

$S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité.

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

Si F_i est une famille de sous-ensembles d'un ensemble X , alors $\sqcup F_i$ est l'union des F_i et indique que cette union est disjointe.

Surfaces de Riemann

Nous commençons ce chapitre par quelques rappels et compléments sur les fonctions holomorphes du plan complexe. Nous en donnons plusieurs caractérisations. Nous discutons ensuite une version du théorème des fonctions implicites dans le cadre holomorphe, ainsi que la notion de fonction méromorphe.

Nous donnons alors une définition des surfaces de Riemann, et nous introduisons la notion d'applications holomorphes entre deux telles surfaces. On décrit ensuite en détails plusieurs exemples : la sphère de Riemann, les tores complexes, et les sous-variétés algébriques du plan affine.

La section suivante est une continuation de l'exemple des tores complexes : on explique comment construire de nouvelles surfaces de Riemann à partir de l'action d'un groupe de transformations holomorphes.

1. Fonctions holomorphes

1.1. Définition. Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe \mathbb{C} , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est *analytique* si elle est localement en tout point somme d'une série entière de rayon de convergence positif, en d'autres termes si pour tout point $a \in \Omega$ il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ telle que $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n| r^n < +\infty$ pour un réel $r > 0$, et

$$f(z + a) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$$

pour tout nombre complexe $|z| < r$.

On dit que f est *conforme* si elle est de classe \mathcal{C}^1 et si sa différentielle est en tout point une application \mathbb{C} -linéaire.

Rappelons comment cette condition est équivalente au système d'équations différentielles dit de Cauchy-Riemann. Pour ce faire, on identifie \mathbb{C} à $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Étant donnée une fonction différentiable $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on note $dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$ sa différentielle de telle sorte que $dh \cdot (x, y) = \frac{\partial h}{\partial x} x + \frac{\partial h}{\partial y} y$ pour tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si maintenant $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ est différentiable alors $df : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application \mathbb{R} -linéaire que l'on peut écrire sous la forme $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Les deux quantités $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont ici des nombres complexes.

Il est commode de travailler avec les symboles $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$ et de poser

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} .$$

Un calcul rapide donne alors les formules

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

La condition pour la différentielle df d'être \mathbb{C} -linéaire est alors équivalente au fait que

$$(1.3) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

Si on écrit $f = P + iQ$ avec $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, cette équation combinée à (1.2) est équivalente aux équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} .$$

THÉORÈME 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert du plan complexe.*

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique si et seulement si elle est conforme.

On appelle fonction *holomorphe* toute fonction d'un ouvert du plan complexe vérifiant l'une des deux conditions équivalentes de l'énoncé précédent.

REMARQUE 1.2. Munissons le plan complexe de la métrique euclidienne standard $dx^2 + dy^2$. Pour cette métrique une application \mathbb{R} -linéaire préserve les angles si et seulement si elle est composée d'une rotation, d'une homothétie et éventuellement de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel. En notations complexes, une telle application est donc de la forme $z \mapsto \lambda z$ ou $\lambda \bar{z}$.

On en déduit qu'une application f est holomorphe si et seulement si sa différentielle $df(z)$ induit une application linéaire qui préserve l'orientation ainsi que les angles mesurés avec la métrique euclidienne du plan complexe.

REMARQUE 1.3. On notera $f'(a) \in \mathbb{C}$ la différentielle d'une application holomorphe en un point a .

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. Commençons par observer que les fonctions monomiales $z \mapsto z^n$ sont bien conformes. En effet la formule de Leibniz implique

$$\frac{\partial z^{n+1}}{\partial \bar{z}} = z \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} + z^n \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = z \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}}$$

et le résultat s'ensuit par récurrence.

Supposons maintenant que f soit analytique dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} . On peut donc écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ avec $\sum |\alpha_n| r^n < \infty$ pour un réel $r > 0$.

Par convergence normale, on peut dériver sous le signe somme et on en déduit que la différentielle de f est la somme des différentielles de fonctions monomiales. En particulier

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0 ,$$

donc f est bien conforme.

Réciproquement, supposons que f soit conforme sur le disque de centre 0 et de rayon $1 + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. La formule de Green-Riemann (voir [Ca, Partie 2, §I.4.4]) donne alors pour tout point z dans le disque unité ouvert

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|w|<1} \frac{1}{\pi(w - z)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dw d\bar{w} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Pour tout ζ sur le cercle unité, on peut maintenant écrire $(\zeta - z)^{-1} = \zeta^{-1} \sum_{n \geq 0} (z/\zeta)^n$ car $|z/\zeta| = |z| < 1$. Comme f est définie sur un disque ouvert contenant le cercle unité, sa restriction au cercle est en particulier bornée et on peut donc permuter les signes somme et intégral pour obtenir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n \geq 0} z^n \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) .$$

On conclut donc que f est analytique. □

1.2. Le théorème d'inversion locale analytique. Voici une version du théorème d'inversion locale dans un cadre analytique.

THÉORÈME 1.4. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.*

Si $f'(a) \neq 0$, alors il existe une application holomorphe g définie sur un voisinage de $f(a)$ telle que $f \circ g = g \circ f = \text{id}$.

En d'autres termes si la différentielle de f ne s'annule pas en un point, alors f admet un inverse holomorphe local.

ESQUISSES DE DÉMONSTRATION. Quitte à translater la situation, on peut toujours supposer que $a = f(a) = 0$.

Une première approche consiste à supposer acquis le théorème d'inversion locale dans le cadre différentiable pour lequel nous renvoyons à [Ca, Partie I §4]. On se place dans des coordonnées réelles $z = x + iy$ et on écrit $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ avec P, Q deux fonctions différentiables à valeurs réelles. La différentielle de f en 0 est alors donnée par la matrice :

$$df(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

En utilisant les relations de Cauchy-Riemann on trouve

$$\det(df(0)) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{bmatrix} = \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|^2$$

puis

$$\begin{aligned} |f'(0)|^2 &= \frac{\partial f}{\partial z} \times \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial P + iQ}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial P + iQ}{\partial y} \right|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \det df(0) \neq 0 . \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction g de classe \mathcal{C}^1 définie dans un voisinage de 0 et telle que $f \circ g = g \circ f = \text{id}$. En particulier $dg(z) = (df(g(z)))^{-1}$ qui est \mathbb{C} -linéaire car df l'est aussi. On en déduit que g est conforme, et donc holomorphe.

Une seconde approche consiste à chercher l'inverse de f sous forme d'une série entière $g(z) = \sum_{n \geq 1} A_n z^n$. Pour celà, on compose par une homothétie adéquate pour pouvoir écrire $\tilde{f}(z) = z + \sum_{n \geq 2} \alpha_n z^n$, et avoir $|\alpha_n| \leq 1$ pour tout n . L'équation $f \circ g(z) = z$ se traduit alors par la suite d'équations $A_1 = 1$ et

$$(1.4) \quad A_n + \sum_{k=2}^n \alpha_k \left(\sum_{l_1 + \dots + l_k = n, 1 \leq l_i < n} A_{l_1} \dots A_{l_k} \right) = 0$$

pour tout $n \geq 2$. La suite A_n est donc uniquement déterminée par récurrence. Il faut maintenant démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} A_n z^n$ ainsi définie possède un rayon de convergence strictement positif. On utilise pour celà le principe de Cauchy-Kovalevskaia.

Soit $G = z + \sum_{k \geq 2} B_k z^k$ la série formelle dont les coefficients vérifient (1.4) avec $\alpha_k = -1$. On vérifie par récurrence que tous les coefficients B_k sont positifs, et que l'on a $F \circ G(z) = z$ avec $F(z) = z - \sum_{n \geq 2} z^n$. Une récurrence simple montre de plus que $|A_n| \leq B_n$.

Pour conclure il suffit de montrer que la série formelle G a un rayon de convergence positif. Or $F(z) = z - \frac{z^2}{1-z}$, et on vérifie donc que $G = \frac{1}{4}((z+1) - \sqrt{(z+1)^2 - 8z})$ où $w \mapsto \sqrt{w}$ est l'unique détermination de la racine carrée définie au voisinage de 1 et prenant la valeur 1 en ce point. Cette fonction a bien un rayon de convergence positif ce qui conclut la démonstration. \square

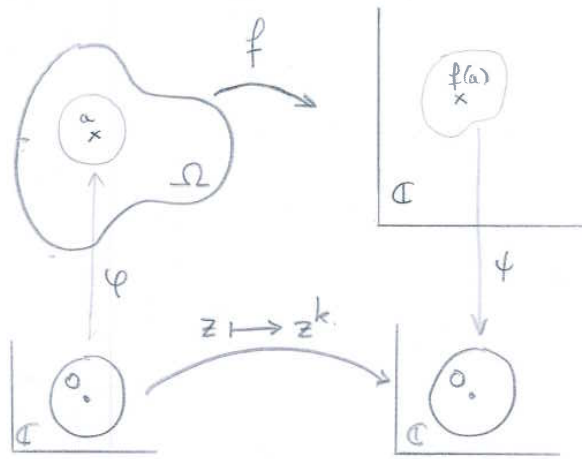
1.3. Forme locale des applications holomorphes. La structure locale des application holomorphes nous sera très utile par la suite.

NOTATION. On notera $f : (\mathbb{C}, a) \rightarrow (\mathbb{C}, b)$ toute application holomorphe définie dans un voisinage (non précisé) de a et tel que $f(a) = b$. Une application holomorphe $f : (\mathbb{C}, a) \rightarrow (\mathbb{C}, b)$ telle que $f'(a) \neq 0$ est appelée *biholomorphisme local* en a .

THÉORÈME 1.5. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

Si f n'est pas localement constante au voisinage de a , alors il existe un entier $k > 0$ et deux biholomorphismes locaux $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, a)$ et $\psi : (\mathbb{C}, f(a)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi(z) = z^k .$$



Ce résultat a de multiples conséquences importantes dont le

COROLLAIRE 1.6. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe définie sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

- (1) Si f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros $f^{-1}(0)$ est un ensemble discret.
- (2) Si f n'est pas constante, l'ensemble de ses points critiques, c'est-à-dire le lieu des points z tels que $f'(z) = 0$ est un ensemble discret.
- (3) Si f n'est pas constante, alors elle est ouverte.

La première assertion est appelée le principe des zéros isolés (voir [Ru, Théorème 10.18]). On démontrera la dernière assertion dans un cadre plus général (voir le Théorème 2.5). Nous laissons la démonstration du deuxième point au lecteur.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5. En choisissant pour commencer $\varphi(z) = z + a$ et $\psi(z) = z - f(a)$, on se ramène au cas où $a = f(a) = 0$. Comme f est analytique on peut l'écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dans un voisinage de l'origine. Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$. Cet entier est positif sinon f est identiquement nulle dans un voisinage de a .

Quitte à post-composer par $z \mapsto z/a_k$ on peut même supposer que l'on a $f(z) = z^k(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n)$.

Rappelons que la fonction $\log(1+z)$ est définie dans le disque unité ouvert par la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, et que $\exp(\log(1+z)) = 1+z$.

Pour $|z| < r$ avec $r > 0$ assez petit, on a $|\sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n| < 1$ et on peut donc poser

$$H(z) = z \exp \left(\frac{1}{k} \log \left(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n \right) \right).$$

C'est une fonction holomorphe définie dans le disque de centre 0 et de rayon r , telle que $H(z) = z(1 + o(1))$ et on a de plus $H(z)^k = z^k \exp(\log(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n)) = f(z)$. Le Théorème 1.4 d'inversion locale s'applique alors à H et on peut poser $\varphi(z) := H^{\circ -1}(z)$ de telle sorte que $f \circ \varphi(z) = H(\varphi(z))^k = z^k$ ce qui conclut la démonstration. \square

1.4. Fonctions méromorphes. Rappelons quelques faits sur les fonctions holomorphes définies sur un disque épointé. Nous énonçons sans démonstration le résultat suivant (voir [Ah, Chapter 5 §1.3]).

THÉORÈME 1.7. *Soit $f : \mathbb{D}(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Il existe alors une unique série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$ telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1, la série entière $\sum_{n \leq 0} \alpha_n z^{-n}$ est de rayon de convergence ∞ , et $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$ pour tout $0 < |z| < 1$.*

On dira qu'une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}(0, 1) \setminus \{0\}$ possède une *singularité essentielle* en 0 si sa série de Laurent possède une infinité de coefficients α_n non nuls avec $n \rightarrow -\infty$.

De manière équivalente, f n'a pas de singularité essentielle si et seulement si il existe un entier $k \geq 0$ tel que $z^k f(z)$ soit holomorphe au voisinage de 0.

REMARQUE 1.8. Il n'est pas difficile de montrer que lorsque 0 est une singularité essentielle, alors pour tout $\epsilon > 0$, l'image $f(\mathbb{D}(0, \epsilon) \setminus \{0\})$ est dense dans \mathbb{C} (c'est le théorème de Casorati-Weierstrass, voir [Ru, Theorem 10.21]).

Le "grand" théorème de Picard énonce que si f possède une singularité essentielle en 0 alors $f(\mathbb{D}(0, 1) \setminus \{0\})$ contient tout le plan complexe sauf au plus une valeur, voir [Ah, Chapter 8]. La démonstration est nettement plus délicate.

DÉFINITION. Une fonction méromorphe sur un ouvert Ω connexe du plan complexe est la donnée :

- d'une partie discrète S de Ω ;
- d'une fonction holomorphe $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$;

tels que f ne possède aucune singularité essentielle aux points de S .

On identifie de plus deux telles données (f_1, S_1) et (f_2, S_2) dès que $f_1 = f_2$ sur le complémentaire de $S_1 \cup S_2$.

Une fonction méromorphe n'est pas à proprement parler une fonction, mais définit cependant une fonction holomorphe sur un ouvert dense $\Omega' \subset \Omega$ maximal (pour

l'inclusion). Le complémentaire $\Omega \setminus \Omega'$ est un ensemble discret appelé *ensemble des pôles* de la fonction.

PROPOSITION 1.9. *L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe Ω de \mathbb{C} forme un corps qui contient l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω .*

DÉMONSTRATION. Il est clair que toute fonction holomorphe induit une fonction méromorphe (dont l'ensemble des pôles est vide).

Prenons deux fonctions méromorphes sur Ω déterminées par deux fonctions holomorphes f_1 et f_2 que l'on peut supposer définies chacune sur $\Omega \setminus S$ où S est un ensemble discret. La somme $f_1 + f_2$ et le produit $f_1 f_2$ sont évidemment holomorphes dans $\Omega \setminus S$. Elles ne possèdent de plus aucune singularité essentielle en un point $p \in S$. En effet on peut supposer que $p = 0$ et que $z^k f_1$ et $z^k f_2$ soient toutes les deux holomorphes et ce quitte à prendre k assez grand. Il s'ensuit que $z^k(f_1 + f_2)$ et $z^{2k}(f_1 f_2)$ sont toutes les deux holomorphes.

Construisons l'inverse d'une fonction méromorphe non identiquement nulle. Une telle fonction est déterminée par f holomorphe sur $\Omega \setminus S$ avec S discret. Supposons que l'on sache que l'ensemble $f^{-1}(0)$ est un ensemble discret de Ω . Alors on regarde la fonction holomorphe déterminée dans $\Omega \setminus (S \cup f^{-1}(0))$ par $g := \frac{1}{f}$. Il faut vérifier que g n'a pas de singularité essentielle. Pour cela prenons un point $p \in S \cup f^{-1}(0)$. Comme précédemment, on peut supposer que $p = 0$. Comme f ne possède pas de singularité essentielle, et que f n'est pas identiquement nulle on peut trouver $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$ et écrire localement $f(z) = az^k + \sum_{n \geq k} \alpha_n z^n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^k(a + \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+k} z^n)} = z^{-k} (a + \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+k} z^n)^{-1}.$$

La fonction $(a + \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+k} z^n)^{-1}$ est holomorphe et donc $1/f$ n'admet pas de singularité essentielle.

Pour voir que $f^{-1}(0)$ est un ensemble discret, on prend un point quelconque $p \in \Omega$ (qui peut être dans S) et on développe en série entière (ou en série de Laurent) f au voisinage de ce point.

Si f n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de p , comme précédemment on peut supposer que $p = 0$, et on a $f(z) = z^k(a + \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+k} z^n)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$. Dans un voisinage U de p tel que $(a + \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+k} z^n)$ ne s'annule pas, on a que $f^{-1}(0) = \{0\}$ si $k > 0$ et est vide sinon. En particulier $f^{-1}(0)$ est bien discret dans un voisinage de p .

Sinon f est identiquement nulle au voisinage de p , et on considère l'ensemble O de points q de Ω admettant un voisinage sur lequel f est nulle. Cet ensemble est non vide et ouvert. L'argument précédent montre de plus qu'il est fermé. Comme Ω est connexe $O = \Omega$ et f est identiquement nulle sur Ω , ce qui contredit notre hypothèse. \square

REMARQUE 1.10. Il faut faire attention à ce qu'une fonction holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble discret dans Ω n'induit pas forcément une fonction

méromorphe. Ainsi la fonction $e^{1/z}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* mais *n'est pas* méromorphe sur \mathbb{C} .

Mentionnons pour la culture le résultat suivant qui donne une perspective différente sur les fonctions méromorphes, et qui permet de généraliser cette notion en dimension quelconque.

THÉORÈME 1.11. *Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe. Toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions holomorphes sur Ω . En d'autres termes le corps des fonctions méromorphes sur Ω est le corps des fractions de l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω .*

Une démonstration est donnée dans [Ru, Theorem 15.12]. Une autre, indépendante, peut être trouvée dans [Hö, Chapter I].

1.5. Le théorème des fonctions implicites analytiques. Dans le cadre le plus général celui-ci nécessite l'introduction des fonctions holomorphes à plusieurs variables. Nous renvoyons à [Ch, Appendix A.2] pour un traitement complet de ce résultat. Nous nous contenterons du résultat suivant.

THÉORÈME 1.12. *Soit $P(z, w) = \sum_{0 \leq i, j \leq d} a_{ij} z^i w^j$ un polynôme de degré au plus d à deux variables complexes. Supposons que $P(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial w}(0, 0) \neq 0$.*

Alors il existe un réel positif $r > 0$ et une fonction holomorphe φ définie dans le disque de centre 0 et de rayon r tels que

$$\{(z, w), P(z, w) = 0, \text{ et } \max\{|z|, |w|\} < r\} = \{(z, \varphi(z)), |z| < r\} .$$

En d'autres termes le lieu $\{P = 0\}$ est localement le graphe d'une fonction holomorphe.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. Une démonstration de ce résultat est donnée dans [Do, Chapitre 1, Théorème 1] basée sur le théorème de Rouché. Nous utilisons ici le théorème des fonctions implicites réel.

On décompose $z = x + iy$, $w = s + it$ en partie réelle et partie imaginaire. La fonction P définit alors une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 . On décompose aussi $P = P_1 + iP_2$ en partie réelle et partie imaginaire et on remarque alors que la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial s} & \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_2}{\partial s} & \frac{\partial P_2}{\partial t} \end{bmatrix} (0, 0)$$

est inversible car son déterminant est égal à $|\frac{\partial P}{\partial z}(0, 0)|^2$ (le calcul est analogue à celui de la démonstration du Théorème 1.4).

Le théorème des fonctions implicites (différentiable) nous fournit donc une application φ de classe \mathcal{C}^∞ définie sur le disque de rayon $r > 0$ telle que

$$\{(z, w), P(z, w) = 0, \text{ et } \max\{|z|, |w|\} < r\} = \{(z, \varphi(z)), |z| < r\} .$$

Pour justifier le fait que φ est holomorphe, on écrit $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec φ_1, φ_2 à valeurs réelles. On utilise alors que $P(z, \varphi(z)) = 0$ ce qui se traduit par les deux équations

$P_1(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = P_2(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) = 0$ pour tout $|x|^2 + |y|^2 < r$ ce qui nous donne des identités que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial s} & \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_2}{\partial s} & \frac{\partial P_2}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

On utilise maintenant le fait que $P = P_1 + iP_2$ est holomorphe en chaque variable z et w . Ceci se traduit par les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial y}$ et $\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial P_2}{\partial x}$ (et de même avec les dérivées partielles en s et t), équations équivalentes à la commutation des matrices

$$J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot J \text{ et } J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial s} & \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_2}{\partial s} & \frac{\partial P_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial s} & \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{\partial P_2}{\partial s} & \frac{\partial P_2}{\partial t} \end{bmatrix} \cdot J$$

avec

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On en déduit alors que J et

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

commutent ce qui montre que φ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann et est donc bien conforme. \square

2. Surfaces de Riemann

2.1. Définitions générales. Les surfaces de Riemann sont les objets géométriques sur lesquels est définie naturellement la notion de fonction holomorphe. La définition formelle est la suivante.

DÉFINITION PROVISOIRE. Une *surface de Riemann* est la donnée d'un espace topologique séparé S , et d'une famille de paires $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ où la famille $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de S , et $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ sont des homéomorphismes de U_i sur leurs images. On impose de plus que la condition (\star) suivante soit vérifiée : pour tout couple d'indice i, j , l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

En d'autres termes, une surface de Riemann est obtenue par recollement d'ouverts du plan complexe et ce par des transformations holomorphes.

Cette définition est cependant provisoire dans le sens que des recouvrements différents peuvent définir la même structure de surface de Riemann sur un espace donné. Pour préciser ce point, on introduit la terminologie suivante.

La donnée \mathfrak{A} d'un recouvrement $\{U_i\}$ et d'homéomorphismes vérifiant la condition (\star) est appelé un *atlas holomorphe*.

Un atlas holomorphe $\mathfrak{B} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ raffine $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ si pour tout $i \in I$ il existe un indice $j = j(i) \in J$ tel que $V_{j(i)} \subset U_i$ et l'application $\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(V_{j(i)}) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

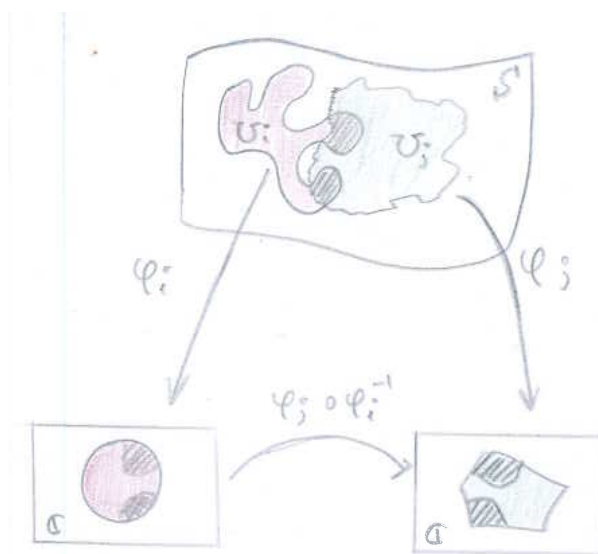


FIGURE 1. Application de recollement

On dira que deux atlas holomorphes $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ sur S sont *équivalents* si il existe un atlas \mathfrak{B} qui raffine à la fois \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' .

Cette notion d'équivalence est bien transitive : si $\mathfrak{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ raffine \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' , et $\mathfrak{B}' = \{(V_j, \psi_j)\}$ raffine \mathfrak{A}' et \mathfrak{A}'' alors $\{(U_i \cap V_j, \varphi_i|_{U_i \cap V_j})\}$ raffine \mathfrak{A} et \mathfrak{A}'' .

DÉFINITION. Une *surface de Riemann* est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas holomorphes (au sens précédent) sur un espace topologique séparé.

REMARQUE 2.1. On peut très bien ne pas être satisfait d'une définition comportant la notion de classe d'équivalence. Une définition équivalente de surface de Riemann est la donnée d'un atlas holomorphe \mathfrak{A} sur un espace topologique séparé qui est maximal au sens suivant. L'atlas \mathfrak{A} raffine tout atlas holomorphe \mathfrak{B} qui lui est équivalent.

Il est important de réaliser que même si cette définition semble un peu technique, les exemples de surfaces de Riemann que nous verrons seront tous définis par *un* atlas holomorphe particulier (pas maximal) associé à un recouvrement qui comportera un, deux, ou une infinité dénombrable d'ouverts.

Soit S une surface de Riemann. Une *carte* holomorphe centrée en un point $p \in S$ est la donnée d'un ouvert U et d'une application $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ induisant un homéomorphisme sur son image avec $\varphi(p) = 0$, tel qu'il existe un atlas holomorphe sur S contenant la paire (U, φ) . Une manière équivalente de penser à une carte holomorphe est la suivante. Si $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est un atlas holomorphe donné sur S , un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$ est une carte holomorphe si et seulement si toutes les applications $\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_i) \rightarrow \mathbb{D}$ sont holomorphes.

REMARQUE 2.2. Pour tout point p , il existe une famille de cartes holomorphes centrées en p et formant une base de voisinages ouverts de p . En effet, si (U, φ) est une carte, alors pour tout ouvert V , $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$ est encore une carte holomorphe (au moins lorsque $U \cap V$ n'est pas vide).

EXEMPLE 2.1. Un ouvert Ω du plan complexe muni de l'atlas "trivial" constitué de l'unique paire $\{(\Omega, \text{id})\}$ est une surface de Riemann.

De manière plus abstraite, tout ouvert Ω d'une surface de Riemann S est muni d'une structure de surface de Riemann. Un atlas pour Ω est donné par exemple par la famille $\{(U_i \cap \Omega, \varphi_i|_{U_i \cap \Omega})\}$ si $\{(U_i, \varphi_i)\}$ est un atlas holomorphe de S .

2.2. Applications holomorphes entre surfaces de Riemann.

DÉFINITION. Soient S, S' deux surfaces de Riemann. Une application $f : S \rightarrow S'$ est dite *holomorphe* si et seulement si pour tout point $p \in S$ il existe une carte holomorphe $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en p , et une carte holomorphe $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en $f(p)$ telles que la composée $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe.

En particulier, toute application holomorphe est continue.

Une application holomorphe est dite *univalente* lorsqu'elle est injective. C'est un *biholomorphisme* lorsqu'elle est bijective, et que son inverse est holomorphe.

Le premier exemple d'application holomorphe est juste une ré-écriture des définitions.

EXEMPLE 2.2. Etant donné un atlas holomorphe $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ les applications $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ sont des biholomorphismes.

L'exemple suivant est fondamental.

EXEMPLE 2.3. Le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ est biholomorphe au disque unité. Un biholomorphisme est donné par l'application $z \mapsto i \frac{z-i}{1-iz}$ (qui envoie i sur 0). Son inverse $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ est l'application $z \mapsto i \frac{1-z}{z+1}$.

PROPOSITION 2.3. *La composition $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ de deux fonctions holomorphes $f : S_1 \rightarrow S_2$, $g : S_2 \rightarrow S_3$, reste holomorphe*

DÉMONSTRATION. Soit z dans S . Par la Remarque 2.2, on peut trouver trois cartes holomorphes $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ et $\varphi_3 : U_3 \rightarrow \mathbb{C}$ centrées respectivement en z , $f(z)$ et $g \circ f(z)$ telle que $f(U_1) \subset U_2$, et $g(U_2) \subset U_3$. Sur $\varphi(U_1)$, on peut donc écrire

$$\varphi_3 \circ (g \circ f) \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_3 \circ g \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$$

qui est bien holomorphe comme composée de deux fonctions holomorphes entre ouverts du plan complexe. \square

La structure des applications holomorphes entre surfaces de Riemann se déduit facilement de celle des fonctions holomorphes démontrées à la section précédente.

THÉORÈME 2.4. *Soient S, S' deux surfaces de Riemann et $f : S \rightarrow S'$ une application holomorphe.*

Si f n'est pas localement constante en un point $p \in S$, alors il existe un entier $k > 0$, des cartes holomorphes locales (U, φ) et (V, ψ) respectivement centrées en p et en $f(p)$ tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k .$$

DÉMONSTRATION. Soit (V_0, ψ_0) une carte holomorphe centrée en $f(p)$ et (U_0, φ_0) une carte centrée en p . On peut supposer que $U_0 \subset f^{-1}(V_0)$. L'application $F := \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ est une fonction holomorphe d'un voisinage de 0 dans \mathbb{C} fixant l'origine. Par le Théorème 1.5 on peut donc trouver des voisinages ouverts A et B de 0 et des biholomorphismes $h : A \rightarrow \mathbb{D}$, $g : B \rightarrow \mathbb{D}$ tels que $F(z) = z^k$ pour un entier $k > 0$. Dans les nouvelles cartes $(U, \varphi) = (\varphi_0^{-1}(A), h \circ \varphi_0)$ et $(V, \psi) = (\psi_0^{-1}(B), g \circ \psi_0)$ on a donc

$$(2.1) \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

THÉORÈME 2.5. *Soient S, S' deux surfaces de Riemann connexes et $f : S \rightarrow S'$ une application holomorphe non constante. Alors f est une application ouverte.*

DÉMONSTRATION. La propriété d'être une application ouverte est une propriété locale. Il suffit de vérifier que pour tout point p , il existe un ouvert U contenant p tel que $f(U)$ est encore ouvert. On applique le théorème précédent. Si f n'est pas localement constante en p , l'entier k de (2.1) est non nul, et l'image d'un petit disque ouvert centré en 0 par $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est encore un disque ouvert et la démonstration est terminée.

Supposons maintenant par l'absurde que l'application f est donc localement constante : il existe un voisinage U de p tel que $f|_U \equiv q := f(p)$. Montrons que $f = f(p)$ sur tout S . Pour cela on introduit l'ensemble O des points de S admettant un voisinage ouvert sur lequel f est constante égale à $f(p)$. Cet ensemble est ouvert par définition et non vide. Montrons qu'il est aussi fermé. Cela terminera la démonstration car S est connexe.

Soit $p_n \in O$ une suite de points convergeant vers un point p' . Prenons des cartes holomorphes (U', φ') et (V', ψ') centrées respectivement en p' et $f(p')$. Pour n assez grand p_n tombe dans U' et la fonction $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ prend donc les mêmes valeurs sur la suite de points $\varphi'(p_n) \rightarrow 0$. Par le principe des zéros isolés, cette fonction est constante au voisinage de l'origine, ce qui implique que f est bien constante égale à $f(p_n) = f(p)$ au voisinage de p' . □

THÉORÈME 2.6. *Soient S, S' deux surfaces de Riemann connexes et $f, g : S \rightarrow S'$ deux applications holomorphes. Si le lieu $\{p \in S, f(p) = g(p)\}$ possède un point d'accumulation dans S , alors $f \equiv g$.*

DÉMONSTRATION. Soit p_* un point d'accumulation du lieu $\{p \in S, f(p) = g(p)\}$. On fixe une carte holomorphe $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en p_* , ainsi qu'une carte holomorphe

$\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en $q_* := f(p_*) = g(p_*)$. Les deux fonctions $F(z) := \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$, et $G(z) := \psi \circ g \circ \phi^{-1}(z)$ sont alors bien définies dans un voisinage commun de 0 et holomorphes, et le lieu $\{F - G = 0\}$ contient $\phi(\{p \in S, f(p) = g(p)\})$. Comme cet ensemble n'est pas discret, le principe des zéros isolés implique $F = G$.

On définit maintenant $\Omega \subset S$ l'ensemble des points p qui possède un voisinage ouvert U sur lequel $f|_U = g|_U$. Par définition, Ω est ouvert. L'argument précédent montre à la fois que Ω n'est pas vide et qu'il est fermé, donc égal à S par connexité. \square

2.3. La sphère de Riemann. C'est le premier exemple de surface de Riemann compacte. On l'obtient en compactifiant le plan complexe en y ajoutant un point "à l'infini" de la manière suivante.

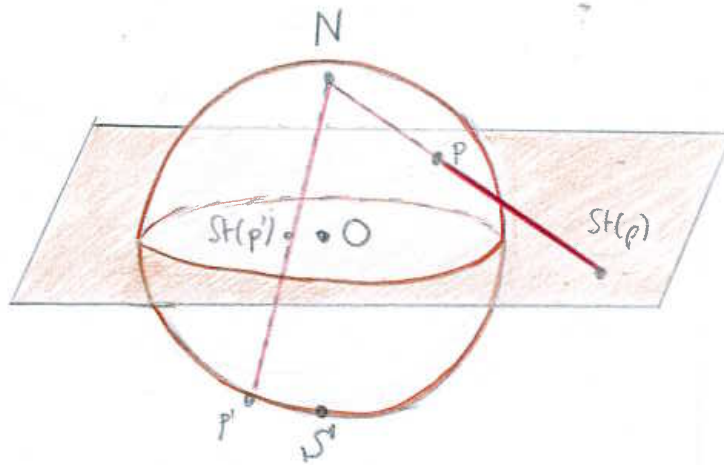
Considérons l'espace S obtenu comme union disjointe de \mathbb{C} et d'un point que l'on notera ∞ . On munit S de la topologie dont les ouverts sont \emptyset, S , les ouverts de \mathbb{C} , et l'union du point ∞ avec le complémentaire d'un ensemble compact dans \mathbb{C} .

Notons que l'espace obtenu est homéomorphe à la sphère S^2 de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . On peut construire cet homéomorphisme en utilisant la projection stéréographique St qui envoie un point $p = (u, v, w) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ différent du pôle nord $N = (0, 0, +1)$ sur l'unique point du plan $\Pi = \{w = 0\}$ sur la droite (pN) , puis on identifie Π au plan complexe. En d'autres termes on pose

$$St(p) = St(u, v, w) = \frac{u}{w-1} + i \frac{v}{w-1} \in \mathbb{C},$$

pour tout $p \neq N$, ainsi que $St(N) = \infty$. L'application inverse est alors donnée par $St^{-1}(\infty) = N$, et

$$St^{-1}(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2} \right).$$



On munit maintenant S d'une structure de surface de Riemann en utilisant deux cartes (U_0, φ_0) et (U_1, φ_1) . La première est donnée par $U_0 = \mathbb{C}$ et $\varphi_0 = \text{id}$ et la seconde

$U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ et $\varphi_1|_{\mathbb{C}^*} = \frac{1}{z}$, $\varphi_1(\infty) = 0$. L'application de recollement $\varphi_{01} := \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ est alors définie sur \mathbb{C}^* et on a $\varphi_{01}(z) = z^{-1}$. L'atlas $\{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$ est donc bien holomorphe.

REMARQUE 2.7. On peut démontrer qu'il existe une unique structure de surface de Riemann sur la sphère S^2 (voir par exemple §2.6). Ce résultat est tout à fait non trivial.

Une manière alternative de penser à la sphère de Riemann est la suivante. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2. Notons $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble des droites complexes de V . Cet espace s'identifie à $V \setminus \{0\}$ modulo la relation d'équivalence $v \sim v'$ ssi $v = \lambda v'$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On le munit de la topologie quotient c'est-à-dire de la topologie dont les ouverts sont les ensembles dont leur préimage par π est ouverte dans $V \setminus \{0\}$. En particulier, l'application naturelle $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est continue.

Soit e_1, e_2 une base de V de telle sorte que tout vecteur $v \in V$ s'écrive sous la forme $v = xe_1 + ye_2$ avec $x, y \in \mathbb{C}$. On note $[v] = [x : y]$ l'image de v dans $\mathbb{P}(V)$. L'espace $\mathbb{P}(V)$ est alors la réunion des deux ouverts $W_0 = \{[x : y], y \neq 0\}$ et $W_1 = \{[x : y], x \neq 0\}$, et les applications $\psi_0 : \mathbb{C} \rightarrow W_0$, $\psi_0(z) := [z : 1]$, et $\psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow W_1$, $\psi_1(z) := [1 : z]$ sont des homéomorphismes. L'atlas $\{(W_0, \psi_0^{-1}), (W_1, \psi_1^{-1})\}$ est un atlas holomorphe dont l'application de recollement est à nouveau $z \mapsto z^{-1}$.

On vérifie alors que les applications $\psi_0 \circ \varphi_0$ et $\psi_1 \circ \varphi_1$ sont des homéomorphismes respectivement de U_0 sur W_0 et de U_1 sur W_1 et induisent un biholomorphisme de la sphère de Riemann sur $\mathbb{P}(V)$.

REMARQUE 2.8. Dans la littérature, plusieurs notations coexistent pour la sphère de Riemann : $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}P^1$ ou même S^2 . Dans ce dernier cas, la notation est justifiée par le fait qu'il existe une unique structure de surface de Riemann pour laquelle le groupe $SO(3)$ est un groupe d'automorphisme de S^2 .

PROPOSITION 2.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $p \in \Omega$, et $f : \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *f s'étend en une fonction méromorphe sur Ω ;*
- (2) *f s'étend en une application holomorphe de Ω à valeurs dans la sphère de Riemann.*

DÉMONSTRATION. (1) \Rightarrow (2) On peut supposer que f n'est pas constante au voisinage de p . Quitte à restreindre Ω et à composer par un biholomorphisme, on peut supposer que $p = 0$ et que l'on peut écrire

$$(2.2) \quad f(z) = z^k \left(\sum_{j \geq 0} a_j z^j \right)$$

où k est un entier et $\sum_{j \geq 0} a_j z^j$ est une série entière de rayon positif. En factorisant si nécessaire par z^{j_0} où j_0 est le plus petit indice tel que $a_{j_0} \neq 0$, on peut aussi imposer $a_0 \neq 0$. Si k est négatif ou nul, la fonction f s'étend holomorphiquement en 0. Si k

est strictement négatif, on définit $f(0) := \infty$. La nouvelle fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est holomorphe. En effet une carte au voisinage de l'infini est donnée par $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ et l'application $\varphi \circ f(z) = z^{-k} (\sum_{j \geq 0} a_j z^j)^{-1}$ est bien holomorphe au voisinage de 0.

(2) \Rightarrow (1) Il suffit de traiter le cas où $f(p) = \infty$. Dans ce cas on peut développer en série entière la fonction $\varphi \circ f = 1/f$ au voisinage de p , et la fonction f est donc bien méromorphe par la Proposition 1.9. \square

2.4. Les courbes elliptiques. Ce second exemple de surface de Riemann compacte est tout aussi fondamental que le précédent. Le point de départ est la donnée d'un réseau Λ de \mathbb{C} c'est-à-dire d'un sous-groupe discret du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ engendrant \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel. Un tel réseau est toujours égal à $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ où ω_1, ω_2 sont des nombres complexes non nuls tels que ω_1/ω_2 n'est pas réel.

On définit maintenant l'espace quotient $S := \mathbb{C}/\Lambda$ où deux points $z, z' \in \mathbb{C}$ sont identifiés par la relation d'équivalence $z \sim z'$ si et seulement si $z - z' \in \Lambda$.

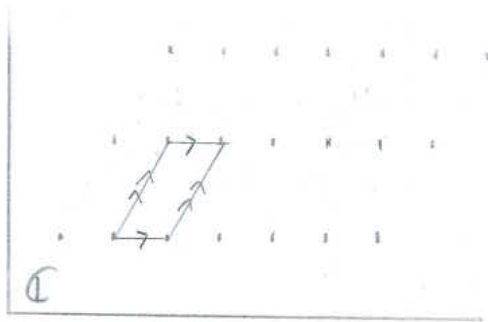


FIGURE 2. Réseau de \mathbb{C}

PROPOSITION 2.10.

- (1) L'espace quotient S est muni d'une unique structure de surface de Riemann telle que la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \rightarrow S$ est holomorphe.
- (2) La loi d'addition sur \mathbb{C} munit la surface S d'une structure de groupe abélien pour laquelle les applications $p \mapsto p + q$ sont holomorphes et ce pour tout point $q \in S$.

REMARQUE 2.11. Une surface de Riemann munie d'une structure de groupe abélien et vérifiant la propriété (2) est appelée *courbe elliptique*. L'usage de la terminologie "courbe" est au premier abord surprenante : elle s'explique cependant par le fait qu'une surface de Riemann est certes de dimension 2 "réelle" mais de dimension 1 "complexe".

On peut montrer que toute courbe elliptique est obtenue par la construction précédente.

DÉMONSTRATION. (1) On va tout d'abord munir S d'une structure d'espace topologique. Pour tout couple $p = \pi(z), p' = \pi(z')$ posons

$$d(p, p') = \inf_{\lambda \in \Lambda} |z - z' + \lambda| .$$

On observe que l'infimum est toujours atteint pour un $\lambda \in \Lambda$. En effet si $|\lambda| > 2|z - z'|$ on a $|z - z' + 0| < |z - z' + \lambda|$; et l'ensemble des points du réseau de norme $\leq 2|z - z'|$ est fini.

Il est clair que d est symétrique. Elle vérifie l'inégalité triangulaire car

$$d(p, p') \leq |z - z' + \lambda + \lambda'| \leq |z - z'' + \lambda| + |z' - z'' + \lambda'|$$

pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, et on conclut en prenant λ et λ' tels que $d(p, \pi(z'')) = |z - z'' + \lambda|$ et $d(p', \pi(z'')) = |z' - z'' + \lambda'|$. Enfin $d(p, p') = 0$ implique l'existence d'un λ tel que $0 = |z - z' + \lambda|$ ce qui montre bien que d induit une distance sur l'espace quotient $S = \mathbb{C}/\Lambda$ (et celui-ci est donc bien séparé).

On va maintenant construire un atlas holomorphe sur S . L'ensemble des cartes sera paramétré par \mathbb{C} .

Fixons n'importe quel réel positif $\rho < \frac{1}{4} \min\{|\lambda|, \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application de projection π restreinte à la boule ouverte $B(z, \rho)$ est une isométrie car d'une part $d(\pi(z + w), \pi(z + w')) = \inf_{\lambda \in \Lambda} |w - w' + \lambda| \leq |w - w'| \leq 2\rho$ pour tout $|w|, |w'| < \rho$. Et d'autre part si λ est un élément de Λ non nul, alors $|\lambda| > 4\rho$ et donc $|w - w' + \lambda| > 2\rho$, ce qui implique bien $d(\pi(z + w), \pi(z + w')) = |w - w'|$. En particulier $\pi(B(z, \rho))$ est la boule de centre $\pi(z)$ et de rayon ρ dans \mathbb{C}/Λ .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $U_z := \pi(B(z, \rho)) \subset S$ et on définit $\varphi_z : U_z \rightarrow B(z, \rho) \subset \mathbb{C}$ comme l'inverse de π .

Il nous faut vérifier les conditions de compatibilité (\star). Soient donc deux points $z, z' \in \mathbb{C}$. On doit vérifier que l'application $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}$ qui est définie sur $U_{zz'} := \varphi_z(U_z \cap U_{z'})$ est holomorphe. Lorsque $U_{zz'} = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer. Sinon un point w dans l'intersection vérifie $|w - z| < \rho$ et $|w - z' + \lambda| < \rho$ pour un $\lambda \in \Lambda$, et donc $U_{zz'} \supset B(z, \rho) \cap B(z' - \lambda, \rho)$. On a en fait égalité $U_{zz'} = B(z, \rho) \cap B(z' - \lambda, \rho)$ car lorsque $w' \in \mathbb{C}$ vérifie $|w' - z| < \rho$ et $|w' - z' + \lambda'| < \rho$ alors $|\lambda' - \lambda| < |\lambda' + w' - z' + z' - w' - \lambda| < 2\rho$ et par suite $\lambda' = \lambda$.

L'application $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}$ est donnée par la translation $w \mapsto w + \lambda$ qui est bien holomorphe.

Notons que l'application π est évidemment holomorphe. En effet pour $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé, $\varphi_{z_0} \circ \pi$ est l'identité!

(2) On se donne $q \in \mathbb{C}/\Lambda$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $\pi(w) = q$. On note $\tau(p) = p + q$, $T(z) := z + w$ de telle sorte que $\pi(T(z)) = \pi(z) + q = \tau(\pi(z))$. Au voisinage d'un point $p_0 := \pi(z_0)$, l'application $\varphi_{z_0+w} \circ \tau \circ \varphi_{z_0}^{-1}$ s'identifie à T qui est bien holomorphe. \square

REMARQUE 2.12. Remarquons que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ l'application $h_a(z) = az$ est un automorphisme du plan complexe envoyant le réseau Λ sur $a\Lambda$, et induisant par passage au quotient un automorphisme de la surface \mathbb{C}/Λ sur $\mathbb{C}/a\Lambda$.

En choisissant $a = \omega_1$, on remarque ainsi que toute courbe elliptique est isomorphe au quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ pour un élément ω du demi-plan de Poincaré.

2.5. Sous-variétés du plan affine.

PROPOSITION 2.13. *Soit $P(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq d} a_{ij} x^i y^j$ un polynôme à deux variables non constant (de degré au plus d). Supposons qu'il n'existe aucun point (x, y) tel que les trois fonctions $P(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ s'annulent simultanément.*

Alors le lieu des zéros de P peut être munie d'une unique structure de surface de Riemann telle que les deux projections $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$ sont holomorphes.

REMARQUE 2.14. Le lieu des zéros de tout polynôme à deux variables P non constant n'est jamais vide car l'image par π_1 (ou π_2) de $P^{-1}(0)$ est nécessairement dense dans \mathbb{C} (en fait cet image est égale au plan complexe privé d'au plus un nombre fini de points).

En effet quitte à permuter les coordonnées, on peut toujours écrire P sous la forme $P(x, y) = \sum_{k=0}^d a_k(x) y^k$ avec $a_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $a_d(x)$ n'est pas identiquement nul. Pour tout x en lequel a_d ne s'annule pas, l'équation $P(x, y) = 0$ possède exactement d solutions avec multiplicité.

REMARQUE 2.15. En général $\{P = 0\}$ peut ne pas être connexe, comme par exemple lorsque $P(x, y) = x(xy - 1)$. On peut cependant montrer que $\{P = 0\}$ est connexe par arcs dès que le polynôme est irréductible, c'est-à-dire lorsqu'il ne peut pas se décomposer en un produit de deux polynômes non constants.

REMARQUE 2.16. Fixons P un polynôme à deux variables non constant. On peut alors montrer que l'ensemble des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $P(x, y) = c$, et $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$ est *fini*.

En d'autres termes les hypothèses de la proposition sont vérifiées pour $P - c$ sauf pour au plus un nombre fini d'exceptions de $c \in \mathbb{C}$.

Appelons (\dagger) la condition de la proposition portant sur le lieu des zéros de P et de ses dérivées partielles.

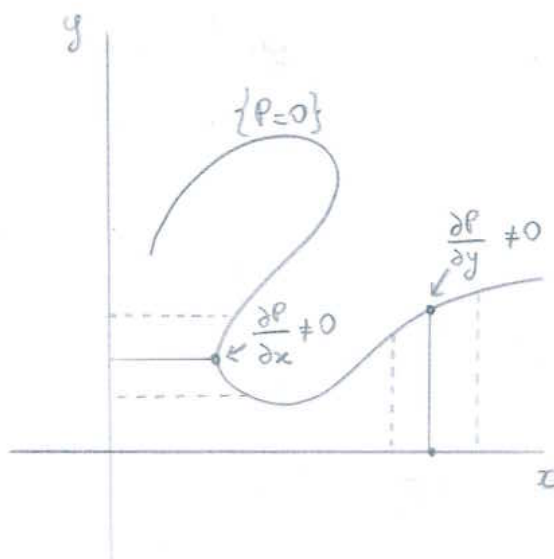
EXEMPLE 2.4. Lorsque le degré de P est égal à 1 de telle sorte que P est une fonction affine, la condition (\dagger) est toujours vérifiée, et $\{P = 0\}$ est le plan complexe.

Lorsque le degré de P est égal à 2, quitte à faire une transformation affine, on se ramène au cas où la partie homogène de degré est soit xy soit x^2 . En utilisant la condition (\dagger) et en faisant des transformations affines supplémentaires, on se ramène au cas où $P(x, y) = xy - 1$ pour lequel $\{P = 0\}$ est isomorphe à \mathbb{C}^* ; ou $P(x, y) = x^2 - y$ pour lequel $\{P = 0\}$ est isomorphe à \mathbb{C} ; ou enfin $P(x, y) = x^2 - 1$ pour lequel $\{P = 0\}$ est isomorphe à l'union disjointe de deux copies de \mathbb{C} .

Lorsque le degré de P est égal à 3 la situation est nettement plus délicate. On montre alors que quitte à faire une transformée affine adéquate, il suffit de traiter le cas $P(x, y) = y^2 - (x^3 + Ax + B)$ avec $A, B \in \mathbb{C}$. La condition (\dagger) est dans ce cas équivalente à $4A^3 + 27B^2 \neq 0$, et $\{P = 0\}$ est alors biholomorphe au complémentaire

d'un point dans une courbe elliptique. Nous renvoyons à [Si, Chapter 2] pour plus d'informations.

REMARQUE 2.17. C'est un fait que les surfaces de Riemann obtenues comme lieu des zéros d'un polynôme à deux variables sont toutes isomorphes au complémentaire d'un nombre fini de points dans une surface de Riemann *compactes*. En d'autres termes, on peut "ajouter" à la surface de Riemann $\{P = 0\}$ un nombre fini de points pour la "compactifier". Dans les exemples sus-cités, la surface de Riemann obtenue est S^2 ou une courbe elliptique.



DÉMONSTRATION. Soit $p := (x_0, y_0) \in P^{-1}(0)$. Par hypothèse, les dérivées partielles de P en p ne sont pas toutes nulles. Supposons tout d'abord que $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Le Théorème 1.12 des fonctions implicites analytiques s'applique alors et il existe un voisinage ouvert W_p de p (dans \mathbb{C}^2) tel que $\{P = 0\} \cap W_p = \{(x, \theta_p(x))\}$ où θ_p est holomorphe dans un voisinage de x_0 . On note $U_p := \{P = 0\} \cap W_p$ et $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ l'application de première projection. C'est un homéomorphisme de U_p sur son image qui est un ouvert de \mathbb{C} .

Sinon on a $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, et $\{P = 0\} \cap W_p = \{(\eta_p(y), y)\}$; et on note $U_p := \{P = 0\} \cap W_p$ et $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ l'application de seconde projection.

Pour conclure, il faut vérifier que les applications de recollement sont bien holomorphes. Supposons donc que deux ouverts U_p et $U_{p'}$ s'intersectent. Si les deux applications φ_p et $\varphi_{p'}$ correspondent à la même projection alors $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1} = \text{id}$. Sinon supposons que $\{P = 0\} \cap W_p = \{(x, \theta_p(x))\}$ et $\{P = 0\} \cap W_{p'} = \{(\eta_{p'}(y), y)\}$. On a alors $\varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1}(y) = \eta_{p'}(y)$ qui est bien holomorphe. \square

2.6. Surfaces de Riemann simplement connexes. Anticipons quelque peu sur une notion que nous verrons plus amplement dans le chapitre sur la théorie des revêtements, et dans un cadre plus général.

Une surface de Riemann S connexe est dite *simplement connexe* si pour toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ telle que $p := \gamma(0) = \gamma(1)$, il existe une application continue (appelée homotopie) $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que $H(0, t) = \gamma(t)$ pour tout t , $H(s, 0) = H(s, 1) = p$ et $H(1, t) = p$ pour tout t . En d'autres termes si il est possible de déformer tout lacet en un lacet constant en gardant les bouts fixés.

Le plan complexe \mathbb{C} ainsi que le disque unité \mathbb{D} sont tous les deux simplement connexes car ils sont convexes. En effet, si un lacet γ est basé en un point p , la composée de γ avec une homothétie nous donne une homotopie de γ au lacet trivial : $H(s, t) = (1 - s)(\gamma(t) - p) + p$.

La sphère de Riemann est aussi simplement connexe. Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$ est un lacet qui évite le point ∞ , il est alors à valeurs dans \mathbb{C} et on peut utiliser l'homotopie précédente pour conclure. Sinon, il faut argumenter que l'on peut trouver une homotopie de γ à un lacet dont l'image évite le point ∞ . Nous laissons le lecteur le soin de le démontrer ou nous le renvoyons au Théorème 1.10 du Chapitre B pour la construction d'une telle homotopie.

Un théorème majeur démontré au début du XX^{ème} siècle par Koebe et Poincaré de manière indépendante est le fait que ces trois surfaces de Riemann sont les seules surfaces de Riemann simplement connexes.

THÉORÈME D'UNIFORMISATION 1. *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à l'un des trois modèles suivants : le disque \mathbb{D} , le plan complexe \mathbb{C} , ou la sphère de Riemann S^2 .*

Nous discuterons au Chapitre B ce que ce résultat implique sur la structure d'une surface de Riemann générale. La remarque suivante illustre la puissance de ce théorème.

REMARQUE 2.18. La propriété d'être simplement connexe est une propriété topologique (qui ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à une surface de Riemann et non de la donnée d'un atlas holomorphe).

Munissons la sphère S^2 d'une structure de surface de Riemann. Le théorème d'uniformisation montre que la surface de Riemann obtenue est biholomorphe à l'un des trois modèles, qui ne peut être que la sphère de Riemann car c'est l'unique surface de Riemann simplement connexe *et* compacte.

On en déduit donc que la sphère porte une *unique* structure de surface de Riemann (voir Remarque 2.7). On peut démontrer ce fait sans utiliser le théorème de Koebe-Poincaré en utilisant le théorème de Riemann-Roch, voir [Re, p.99].

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat magnifique, toutes très délicates. Un travail collégial d'une quinzaine de mathématiciens a consisté à relire et à expliquer dans un langage plus moderne les approches de Poincaré et de Koebe ainsi que les

travaux précurseurs de Riemann et Klein, et a abouti à la publication d'un ouvrage [SG] passionnant sur ce sujet (bien que sa lecture soit ardue).

Nous nous contenterons ici de remarquer que les trois surfaces de Riemann \mathbb{D} , \mathbb{C} et S^2 ne sont pas biholomorphes les unes avec les autres. En effet toute application holomorphe $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ doit être constante par le théorème de Liouville (voir e.g. [Ru, Theorem 10.23]), et la sphère de Riemann est l'unique surface compacte parmi les trois.

Nous calculons aussi leur groupe de biholomorphismes, ce qui nous sera utile dans la suite.

THÉORÈME 2.19.

- (1) *Le groupe des biholomorphismes du plan complexe est constitué des biholomorphismes affines $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*
- (2) *Le groupe des biholomorphismes de la sphère de Riemann est constitué des homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Il est isomorphe en tant que groupe à $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$.*
- (3) *Le groupe des biholomorphismes du disque unité \mathbb{D} est constitué des applications de la forme $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$. Il est isomorphe en tant que groupe à $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

Rappelons les définitions des groupes PGL et PSL qui apparaissent dans l'énoncé ci-dessus.

Par définition le groupe $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ est le quotient du groupe $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ des matrices 2×2 à coefficients complexes inversibles par son centre, c'est-à-dire par le groupe des matrices diagonales. En d'autres termes on identifie deux matrices $A \sim A' \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ dès que $A^{-1}A' = \lambda \text{id}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de matrices pour cette relation. Si $[A] \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ est la classe d'équivalence de $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$, on pose $[A] \cdot [A'] := [AA']$. Comme les matrices diagonales commutent avec toutes les autres matrices, on vérifie que ceci définit bien une structure de groupe sur $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

On a de plus une application naturelle de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ vers le groupe des transformations de la sphère de Riemann qui envoie la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vers l'homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Cette application est un morphisme de groupe. Ce morphisme est surjectif par le théorème précédent et son noyau est l'ensemble des matrices diagonales, ce qui montre que $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ s'identifie au groupe des homographies (directes) de la sphère de Riemann.

La définition du groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est analogue à celle de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$: c'est le quotient de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ par son centre, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence des matrices $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ modulo la relation $A \sim A'$ si et seulement si $A^{-1}A' = \pm \text{id}$.

L'injection $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ induit un morphisme de groupes $PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C})$ qui s'avère être aussi injectif.

REMARQUE 2.20. On peut aussi argumenter que \mathbb{C} et \mathbb{D} ne sont pas biholomorphes car leur groupe d'automorphismes ne sont pas isomorphes en tant que groupe. En effet, le groupe dérivé¹ du groupe affine est abélien tandis que le groupe dérivé de $PSL(2, \mathbb{R})$ ne l'est pas. Cet argument est évidemment beaucoup plus compliqué que celui basé sur le théorème de Liouville. Cependant le calcul des groupes d'automorphismes s'avère un outil puissant en dimension plus grande pour distinguer des domaines de \mathbb{C}^n (ou des variétés complexes).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.19. (1) Toute application affine non constante est un biholomorphisme du plan complexe. Réciproquement, soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un biholomorphisme. Considérons la fonction $g(z) := f(1/z)$. C'est une fonction définie sur \mathbb{C}^* . Rappelons que f est bijective, et donc pour tout $R > 0$ assez grand il existe un $\rho > 0$ pour que $f(B(0, \rho)) \supset B(0, R)$, ce qui implique $|g(z)| \geq R$ dès que $|z| < 1/\rho$. Par le théorème de Casorati-Weierstrass (voir la Remarque 1.8), la singularité de g en 0 ne peut être essentielle. En développant g en série de Laurent, on voit qu'il existe un réel $A > 0$ et un entier $k \geq 1$ tels que $|g(z)| \leq \frac{A}{|z|^k}$ pour tout z assez petit. Ceci montre l'existence d'un réel $A' > 0$ tel que $|f(z)| \leq A' \max\{1, |z|^k\}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Les estimées de Cauchy [Ru, Theorem 10.26] pour la dérivée $(k+1)$ -ième de f donnent alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $R > |z|$, l'inégalité

$$|f^{(k+1)}(z)| \leq (k+1)! \frac{\sup_{|z|=R} |f|}{R^{k+1}}.$$

Ceci montre que $f^{(k)} = 0$ comme on le voit en faisant tendre R vers l'infini. L'application f est donc un polynôme. Comme elle est injective, elle est nécessairement de degré 1.

(2) On vérifie tout d'abord que toute homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ induit bien un biholomorphisme de la sphère dans elle-même, son inverse étant donnée par $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$. Soit $f : S^2 \rightarrow S^2$ un biholomorphisme. Choisissons $A \in PGL(2, \mathbb{C})$ une homographie envoyant $f(\infty)$ sur ∞ de telle sorte que $(A \circ f)(\infty) = \infty$. Alors $A \circ f$ induit un biholomorphisme du plan complexe dans lui-même. Par ce qui précède $A \circ f$ est affine, et donc f est bien une homographie (directe).

(3) On doit tout d'abord vérifier que toute homographie de la forme $h_{a,\theta}(z) := e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$ est un biholomorphisme du disque unité. L'inverse d'une telle application est donnée par $z \mapsto e^{-i\theta} \frac{z+ae^{i\theta}}{1+\bar{a}e^{-i\theta}z}$ qui est bien de la même forme. Il suffit donc de vérifier l'invariance du disque unité par $h_{a,\theta}$, et celle-ci résulte du calcul

1. Le groupe dérivé d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ avec $g_1, g_2 \in G$.

suivant :

$$1 - \left| \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{1 + |a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} > 0$$

dès que $|z|, |a| < 1$.

Finalemt soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un biholomorphisme. Comme dans le cas de la sphère, quitte à composer par le biholomorphisme $z \mapsto \frac{z-f(0)}{1-\overline{f(0)}z}$ envoyant $f(0)$ sur 0, on peut supposer que $f(0) = 0$. Le lemme de Schwarz (voir [Ru, Theorem 12.2]) implique alors que $|f(z)| = |z|$ et donc que $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un réel θ , ce qui montre bien que f est de la forme souhaitée.

La vérification que le groupe de biholomorphisme du disque est $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ résulte du théorème suivant. \square

THÉORÈME 2.21. *Le groupe des biholomorphismes du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ est constitué des homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = +1$. Il est isomorphe en tant que groupe à $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que le groupe des homographies à coefficients réels (et de déterminant 1) soit isomorphe au groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est démontré avec les mêmes arguments exposés après l'énoncé du Théorème 2.19.

Le fait qu'une homographie $h(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = +1$ préserve \mathbb{H} résulte du calcul suivant :

$$\Im \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}} \right) = \left(\frac{(ad-bc)\Im(z)}{|cz+d|^2} \right) > 0.$$

Soit maintenant h un biholomorphisme de \mathbb{H} . En post-composant h avec l'inverse du biholomorphisme du demi-plan $z \mapsto \Re(h(i))z + i\Im(h(i))$ envoyant i sur $h(i)$, on peut supposer que $h(i) = i$.

Rappelons que l'application $\phi(z) = i \frac{z-i}{1-iz}$ est un biholomorphisme du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} sur \mathbb{D} qui envoie i sur 0. L'application $\phi \circ h \circ \phi^{-1}(z)$ est donc un biholomorphisme du disque fixant l'origine, c'est-à-dire une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On en déduit que

$$h(z) = \phi^{-1}(e^{i\theta}\phi(z)) = \phi^{-1} \left(e^{i\theta} i \frac{z-i}{1-iz} \right) = i \frac{1 - e^{i\theta} i \frac{z-i}{1-iz}}{e^{i\theta} i \frac{z-i}{1-iz} + 1} = \frac{z + \tan(\frac{\theta}{2})}{1 - \tan(\frac{\theta}{2})z},$$

au moins lorsque $\theta \neq \pi$. Cette application est bien une homographie à coefficients réels associée à une matrice de déterminant positif $1 + \tan^2(\theta/2)$. On se ramène enfin au cas d'une matrice de déterminant 1 en divisant tous les coefficients par $\sqrt{1 + \tan^2(\theta/2)}$. Lorsque $\theta = \pi$, on vérifie directement que $h(z) = \frac{-1}{z}$. \square

3. Action de groupe sur les surfaces de Riemann

Nous allons ici discuter le quotient d'une surface de Riemann par l'action d'un groupe, et généraliser ainsi la construction des courbes elliptiques vue en §2.4.

3.1. Action de groupe. Rappelons qu'une *action d'un groupe* G sur un espace topologique X est la donnée d'un morphisme de groupe de G vers le groupe des homéomorphismes de X . En d'autres termes pour tout $g \in G$ on se donne un homéomorphisme $x \mapsto g \cdot x$ de telle sorte que $g' \cdot (g \cdot x) = (g'g) \cdot x$ pour tout couple d'éléments $g, g' \in G$ et pour tout $x \in X$. On impose de plus $e \cdot x = x$ si e est l'unité de G .

La G -orbite d'un point $x \in X$ est l'ensemble $\{g \cdot x\}_{g \in G}$. Toute action induit une relation d'équivalence : $x \sim x'$ si et seulement si x et x' appartiennent à la même G -orbite. On notera X/G l'espace quotient obtenu. On le munit de la topologie quotient qui est la plus fine rendant l'application naturelle $\pi : X \rightarrow X/G$ continue. Pour cette topologie $U \subset X/G$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ l'est.

REMARQUE 3.1. Il est important de garder en tête que la topologie de X/G est en général très pathologique : elle peut être ainsi non-séparée, et même si X est une variété, l'espace quotient ne le reste pas nécessairement.

EXEMPLE 3.1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et notons $R_\theta(z) := e^{2i\pi\theta}z$ la rotation d'angle θ sur le cercle S^1 . L'espace quotient $Q := S^1/\langle R_\theta \rangle$ n'est pas séparé.

En effet, soit U un ouvert non-vidé de Q . La préimage V de U dans S^1 est ouverte, donc contient un segment ouvert non trivial. Elle est de plus invariante par la rotation d'angle θ ce qui implique $V = S^1$. En d'autres termes la topologie induite sur Q ne contient que deux ouverts : Q et \emptyset !

De manière tout à fait analogue, le quotient du disque \mathbb{D} par une rotation d'angle irrationnel n'est pas séparé.

Quelques points de terminologie sur les actions de groupe.

DÉFINITION.

- Une partie A de X est dite *G -invariante* si $g \cdot a \in A$ pour tout $g \in G$ et tout $a \in A$.
- Supposons que G agisse sur deux ensembles X et Y (éventuellement trivialement). Une application $h : X \rightarrow Y$ est dite *G -équivariante* si et seulement si $h(g \cdot x) = g \cdot h(x)$ pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$.

La plus petite partie G -invariante contenant un point $x \in X$ est l'ensemble des points de la forme $\{g \cdot x\}_{g \in G}$, et coïncide donc avec la G -orbite de x .

Voici maintenant une liste (non exhaustive) de caractéristiques importantes des actions de groupe.

DÉFINITION.

- Une action est *transitive* si pour toute paire de points $x, x' \in X$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = x'$ (i.e. la G -orbite de tout point est l'espace en entier).
- Une action est *n -transitive* si étant donnés deux n -uplets de points x_1, \dots, x_n et x'_1, \dots, x'_n dans X il existe un élément $g \in G$ tel que $g \cdot x_i = x'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
- Une action est *libre* si $g \cdot x = x$ implique $g = e$.

- Une action est *fidèle* (on dit aussi *effective*) si $g \cdot x = x$ pour tout x implique que g est l'élément neutre de G (i.e. le morphisme associé de G dans le groupe des homéomorphismes de X est injectif).

Une action n -transitive est toujours $(n - 1)$ -transitive. Par définition une action 1-transitive est transitive. Notons de plus que toute action libre est fidèle.

EXEMPLE 3.2. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ des transformations linéaires d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension d agit naturellement sur V . L'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur V n'est pas transitive. Son action sur $V \setminus \{0\}$ est (1-)transitive, mais pas 2-transitive. Cette action est de plus fidèle, mais pas libre.

On peut aussi regarder l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur l'espace \mathcal{B}_V des bases de V , c'est-à-dire sur les d -uplets (e_1, \dots, e_d) d'éléments de V qui engendrent V . Dans ce cas, l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur \mathcal{B}_V est libre.

Une *action holomorphe* d'un groupe G sur une surface de Riemann S est la donnée d'un morphisme de groupe de G vers le groupe des biholomorphismes de S . Par exemple tout sous-groupe du groupe des biholomorphismes de S agit holomorphiquement sur S .

EXEMPLE 3.3. Le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ agit 3-transitivement sur la sphère de Riemann (mais pas 4-transitivement). Le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit 2-transitivement sur le demi-plan de Poincaré (mais pas 3-transitivement).

EXEMPLE 3.4. Une action du groupe \mathbb{Z} sur une surface de Riemann S est la donnée d'un biholomorphisme de S . En effet l'application $p \mapsto 1 \cdot p$ est bien un biholomorphisme de S . Réciproquement, pour tout biholomorphisme φ de S on peut poser $n \cdot p := \varphi^n(p)$ pour tout couple $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in S$.

3.2. Quotient d'une surface de Riemann. On va ici chercher à caractériser les actions holomorphes d'un groupe G sur une surface de Riemann S telles que l'espace quotient S/G puisse être muni d'une structure de surface de Riemann.

DÉFINITION. Supposons que G agisse holomorphiquement sur une surface de Riemann S . On dira que cette action est proprement discontinue si pour tout compact $K \subset S$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(K) \cap K \neq \emptyset$ est fini².

REMARQUE 3.2. Il est équivalent de supposer que pour toute paire de compacts K, L l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini.

EXEMPLE 3.5. Un groupe fini agit toujours proprement discontinûment.

EXEMPLE 3.6. Rappelons qu'une action de \mathbb{Z} sur \mathbb{C} est déterminée par un biholomorphisme affine. Si cet biholomorphisme est conjugué à une translation $z \mapsto z + 1$ ou à une rotation d'ordre fini, alors l'action est proprement discontinue. Sinon elle ne l'est pas.

² On verra à la Section 2.3 du prochain chapitre la définition générale d'action proprement discontinue.

EXEMPLE 3.7. Etant donnés deux éléments $\omega, \omega' \in \mathbb{C}^*$, on peut considérer l'action de \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{C} donnée par $(n, n') \cdot z := z + n\omega + n'\omega'$. Cette action est proprement discontinue si et seulement si le quotient ω/ω' n'est pas réel.

THÉORÈME 3.3. *Soit G un groupe agissant holomorphiquement sur une surface de Riemann connexe S de manière proprement discontinue. Alors l'espace (topologique) quotient S/G admet une structure de surface de Riemann de telle sorte que l'application canonique $\pi : S \rightarrow S/G$ est holomorphe.*

Cette structure est caractérisée par la propriété suivante. Une application $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ d'un ouvert V de S/G est holomorphe si et seulement si l'application $f \circ \pi$ est holomorphe sur $\pi^{-1}(V)$.

De plus étant donnée une surface de Riemann S' et une application holomorphe $h : S \rightarrow S'$ telle que $h(g \cdot p) = h(p)$ pour tout $g \in G$, il existe une et une seule application holomorphe $\bar{h} : S/G \rightarrow S'$ telle que $\bar{h} \circ \pi = h$.

REMARQUE 3.4. L'hypothèse portant sur la nature discontinue de l'action de G est nécessaire pour espérer que le quotient S/G ait une structure de surface de Riemann, voir l'Exemple 3.1. Le point du théorème est donc que cette condition est aussi suffisante.

REMARQUE 3.5. Lorsque $G = \mathbb{Z}^2$ et l'action est déterminée comme à l'Exemple 3.7 avec ω/ω' non réel, le théorème précédent permet de retrouver la Proposition 2.10, et donc la construction des courbes elliptiques.

REMARQUE 3.6. Nous allons construire une structure de surface de Riemann sur S/G vérifiant toutes les conditions mentionnées dans l'énoncé du théorème. Une fois cette construction réalisée, il est clair que cette structure est unique : en effet, une carte holomorphe $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ sur un ouvert $V \subset S/G$ (pour la topologie quotient !) est alors une application injective telle que $\psi \circ \pi$ soit holomorphe.

DÉMONSTRATION. Dans toute cette démonstration, on fixe une famille de cartes holomorphes $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ telles que U_p est un voisinage ouvert de $p \in S$ d'adhérence compacte dans S , et $\phi_p(p) = 0$.

a) *L'espace S/G est séparé.* Notons $\pi : S \rightarrow S/G$ la projection canonique. Montrons tout d'abord que S/G est séparée pour la topologie quotient. Pour cela prenons deux points $q = \pi(p) \neq q' = \pi(p')$. En particulier les deux points p et p' de S sont distincts. Fixons $n > 0$ assez grand pour que $\overline{\mathbb{D}(0, \frac{1}{n})}$ soit contenu dans $\phi_p(U_p)$. On pose $U_{p,n} := \phi_p^{-1}(\mathbb{D}(0, \frac{1}{n}))$, puis $O_n(p) := \cup_{g \in G} g(U_{p,n})$ qui est alors un ouvert G -invariant contenant p . Comme $O_n(p) = \pi^{-1}(\pi(O_n(p)))$, la partie $\pi(O_n(p)) \subset S/G$ est un voisinage ouvert de $q = \pi(p)$. On construit de même les ouverts $U_{p',n}, O_n(p')$ qui sont des voisinages de p' , et $\pi(O_n(p'))$ qui est un voisinage de q' .

Pour voir que S/G est séparée, il suffit de montrer que les deux ouverts $\pi(O_n(p))$ et $\pi(O_n(p'))$ ne s'intersectent pas au moins pour $n > 0$ assez grand. Supposons par contradiction que $\pi(O_n(p)) \cap \pi(O_n(p'))$ soit non vide pour tout $n > 0$. On obtient une suite de points $q_n \in U_{p,n} \cap O_n(p')$, et donc une suite d'éléments $g_n \in G$ tels que

$g_n \cdot q_n \in U_{p',n}$. Comme l'action est proprement discontinue, et que g_n appartient à l'ensemble $\{g \in G, g(\overline{U_{p,n}}) \cap \overline{U_{p',n}} \neq \emptyset\}$, on peut extraire une sous-suite telle que $g_n = g$ est un élément fixe de G . En passant à la limite, on en déduit que $g \cdot p = p'$ et donc $\pi(p) = \pi(p')$, ce qui contredit notre hypothèse.

Il nous faut maintenant construire des cartes holomorphes. Nous allons tout d'abord traiter le cas sans point fixe pour lequel la démonstration est un peu plus simple.

b) *Construction de cartes holomorphes lorsque l'action est libre.* Dans cette partie, nous supposons donc que pour tout $g \in G$ différent de l'identité le lieu des points fixes de g est vide, i.e. $g \cdot x = x$ implique $g = \text{id}$.

Fixons $p \in S$. On va tout d'abord remplacer U_p par un ouvert plus petit $U'_p \subset U_p$ de telle sorte que $g(U'_p) \cap U'_p = \emptyset$ dès que $g \neq \text{id}$. Ceci est toujours possible. Sinon on pourrait trouver une suite de points $p_n \rightarrow p$ et des éléments $g_n \neq \text{id}$ tels que $g_n \cdot p_n \rightarrow p$. L'action de G étant proprement discontinue, on peut supposer comme à l'étape a) que $g_n = g \neq \text{id}$ (quitte à extraire une sous-suite), et on obtiendrait $g \cdot p = p$ ce qui contredit le fait que G agit librement.

Pour simplifier les notations on notera encore $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ les cartes que l'on vient de construire. Le point est que la restriction de l'application $\pi : U_p \rightarrow V_p := \pi(U_p) \subset S/G$ est maintenant un homéomorphisme. Pour le voir, il suffit de vérifier que l'application est injective, ce qui revient exactement à la propriété $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ dès que $g \neq \text{id}$. Notons $\pi_p^{-1} : V_p \rightarrow U_p$ l'inverse de cette application, et $\psi_p := \phi_p \circ \pi_p^{-1} : V_p \rightarrow \mathbb{C}$. Nous allons montrer que la famille (V_p, ψ_p) est un atlas holomorphe sur S/G .

Soient donc p, p' deux points de S tels que $V_p \cap V_{p'} \subset S/G$ soit non vide. On cherche à montrer que l'application $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1} : \psi_p(V_p \cap V_{p'}) \rightarrow \psi_{p'}(V_{p'})$ est holomorphe. Remarquons tout d'abord que

$$\pi_p^{-1}(V_p \cap V_{p'}) = U_p \cap \pi^{-1}(V_{p'}) = U_p \cap \bigcup_{g \in G} g(U_{p'}) ,$$

et que de plus les ouverts $g(U_{p'})$ sont disjoints deux à deux. Comme $\psi_p(V_p \cap V_{p'}) = \phi_p \pi_p^{-1}(V_p \cap V_{p'})$, il suffit de voir que $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ est holomorphe sur chaque ouvert $\phi_p(U_p \cap g(U_{p'}))$.

Or sur $\pi(U_p \cap g(U_{p'}))$, on a $\pi_p^{-1} = g^{-1} \cdot \pi_{g(p')}^{-1} = g^{-1} \cdot \pi_{p'}^{-1}$, et donc

$$\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}(z) = \phi_{p'} \circ \pi_{p'}^{-1} \circ \pi \circ \phi_p^{-1}(z) = \phi_{p'}(g^{-1} \cdot \phi_p^{-1}(z)) ,$$

qui est bien holomorphe car G agit par transformations holomorphes sur S .

c) *Construction de cartes holomorphes lorsque l'action possède éventuellement des points fixes.* Comme G agit discontinûment le sous-groupe H de G des éléments tels que $g \cdot p = p$ pour tout p est un groupe fini distingué et on obtient une action fidèle de G/H sur S induite par celle de G . Dans la suite on remplacera donc G par G/H et on supposera que l'action de G sur S est fidèle.

Le premier point à vérifier est que l'ensemble de points fixes de l'action

$$F = \{p \in S, \exists g \neq e, g \cdot p = p\}$$

est discret dans S . Si ce n'était pas le cas, alors on pourrait trouver une suite de points distincts $p_n \in F$ qui converge vers un point p_∞ de S , et une suite $e \neq g_n \in G$ tels que $g_n \cdot p_n = p_n$. A nouveau par discontinuité de l'action (appliquée par exemple au compact $\{p_n\}_{n \geq 0} \cup \{p_\infty\}$) et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $g_n = g$ est un élément fixe de G . En particulier $g \cdot p_n = p_n$ pour une infinité de n , et on en déduit que $g \cdot p = p$ pour tout p par le Théorème 2.6.

Pour construire maintenant un atlas holomorphe, on va définir pour tout $p_0 \in S$ une carte holomorphe $\psi_{p_0} : V_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en $\pi(p_0) \in S/G$. Si $p_0 \notin F$, la construction est identique à celle que l'on a faite dans le cas précédent. Nous pouvons donc supposer que $p_0 \in F$. Le point clef est le Lemme 3.7 ci-dessous qui nous permet de se ramener à traiter l'action d'un groupe fini de rotations dans le plan. Voyons ceci en détails.

Notons G_{p_0} le stabilisateur de p_0 , c'est-à-dire le sous-groupe de G qui fixe p_0 . C'est un groupe fini (pas nécessairement distingué). On choisit une carte holomorphe $\phi_{p_0} : U_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$. Quitte à remplacer U_{p_0} par un ouvert plus petit, on peut supposer que $g(U_{p_0}) \cap U_{p_0} \neq \emptyset$ implique $g \in G_{p_0}$. On peut aussi supposer que U_{p_0} est G_{p_0} -invariant quitte à le remplacer par $\cap_{g \in G_{p_0}} g(U_{p_0})$.

On obtient donc une action du groupe fini G_{p_0} sur l'ouvert $\Omega_{p_0} = \phi_{p_0}(U_{p_0})$ du plan complexe en posant $g \cdot z := \phi_{p_0}(g \cdot \phi_{p_0}^{-1}(z))$. Cette action fixe $0 \in \mathbb{C}$.

LEMME 3.7 (Lemme de Cartan). *Il existe un biholomorphisme local $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ et un morphisme de groupe $\lambda(g) : G_{p_0} \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ tel que*

$$h(g \cdot h^{-1}(z)) = \lambda(g)z .$$

Comme G_{p_0} est fini, ce lemme implique en particulier que λ est à valeurs dans S^1 . L'action étant fidèle, λ est un isomorphisme, et donc G_{p_0} est isomorphe au groupe des racines k -ième de l'unité pour un certain $k \geq 2$.

On remplace maintenant ϕ_{p_0} par $h \circ \phi_{p_0}$ et U_{p_0} par $(h \circ \phi_{p_0})^{-1}(\mathbb{D}(0, \epsilon))$ avec $\epsilon > 0$ assez petit. On se retrouve finalement dans la situation suivante : $\phi_{p_0} : U_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$ est une carte holomorphe centrée en p_0 ; U_{p_0} est G_{p_0} -invariant ; $\phi_{p_0}(U_{p_0}) = \mathbb{D}(0, \epsilon)$; $\phi_{p_0}(g \cdot \phi_{p_0}^{-1}(z)) = \lambda(g)z$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$; et $\{\lambda(g)\}_{g \in G_{p_0}} = \{\exp(\frac{2i\pi l}{k}), 1 \leq l \leq k\}$.

On définit alors $V_{p_0} := \pi(U_{p_0})$ et on pose $\psi_{p_0}(\pi(p)) := \phi_{p_0}(p)^k$. L'application ψ_{p_0} est bien définie car $\pi(p) = \pi(p')$ avec $p, p' \in U_{p_0}$ implique l'existence d'un $g \in G_{p_0}$ tel que $g \cdot p = p'$ et donc d'un entier l tel que $\exp(\frac{2i\pi l}{k})\phi_{p_0}(p) = \phi_{p_0}(p')$. Le même argument montre plus précisément que ψ_{p_0} est une bijection de V_{p_0} sur $\mathbb{D}(0, \epsilon^k)$, et qu'elle est de plus continue. En la restreignant sur les préimages des compacts $\overline{\mathbb{D}(0, \eta)}$ avec η croissant vers ϵ^k , on voit que ψ_{p_0} est en réalité un homéomorphisme de V_{p_0} sur $\mathbb{D}(0, \epsilon^k)$.

Pour conclure, il nous faut vérifier que les changements de cartes $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ sont holomorphes. Cette application est définie sur l'ouvert $\psi_p(V_p \cap V_{p'})$.

Notons que par construction $\psi_p(V_p)$ est un disque, et que sur tout secteur \mathcal{S} ouvert d'angle $2\pi/k$ (où k est le cardinal du stabilisateur de p), on peut écrire $\psi_p(z) := \pi(\phi_p^{-1}(z^{1/k}))$.

On a de plus

$$U_p \cap \pi^{-1}(V_{p'}) = \bigcup_{g \in G/G_{p'}} U_p \cap g(U_{p'}),$$

où $g \in G/G_{p'}$ signifie que g parcourt une partie de G intersectant chaque classe (à droite) de G modulo $G_{p'}$ exactement une fois, et cette union est *disjointe*.

Dans $\mathcal{S} \cap \psi_p(\pi(g(U_{p'})))$, on a donc

$$\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}(z) = \psi_{p'} \circ \pi(\phi_p^{-1}(z^{1/k})) = (\phi_{p'}(g \cdot \phi_p^{-1}(z^{1/k})))^{k'},$$

qui est bien holomorphe (où k' est le cardinal du stabilisateur de p'). En recouvrant $\psi_p(V_p)$ par des secteurs ouverts d'angle $2\pi/k$, on en déduit tout d'abord que $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ est holomorphe dans tout $\psi_p(V_p \cap V_{p'})$ privé de l'origine. Comme $\psi_{p'}$ est à valeurs dans un borné de \mathbb{C} par construction, l'application $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ s'étend holomorphiquement même en p . (on peut aussi remarquer que par construction le seul cas où $V_{p'}$ contient p est lorsque p' est dans l'orbite de p).

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.7. Pour simplifier les notations on écrit $g \cdot z := g(z)$. On pose alors

$$h(z) := \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(z)}{g'(0)}.$$

La dérivée en 0 de h est égale à $h'(0) = 1$, donc h est un biholomorphisme local. Pour tout $g_0 \in G$, on obtient enfin

$$h(g_0(z)) = \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(g_0(z))}{g'(0)} = g'_0(0) \times \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(z)}{g'(0)} = g'_0(0) h(z)$$

car $g(g_0(z)) = (gg_0)(z)$ et $(gg_0)'(0) = g'(0) \times g'_0(0)$. □

Avant d'attaquer la dernière partie de la démonstration, résumons les propriétés de la structure de surface de Riemann que nous avons construite sur S/G .

- (A1) Le stabilisateur G_p de tout point $p \in S$, est cyclique.
- (A2) Pour tout $p \in S$, il existe une carte holomorphe $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ centrée sur p , et une autre carte holomorphe $\psi_p : V_p \rightarrow \mathbb{C}$ centrée sur $\pi(p)$, telles que $\psi_p \circ \pi \circ \phi_p^{-1}(z) = z^k$ où k est l'ordre de G_p .
- (A3) L'ensemble $F \subset S$ des points dont le stabilisateur n'est pas trivial est un ensemble G -invariant et discret. Son image par π dans S/G l'est encore.

Pour cette dernière assertion, il suffit de procéder par contradiction et d'utiliser le fait que F est G -invariant et discret.

On remarque que par (A2) l'application π est holomorphe.

d) *Applications holomorphes sur S/G .*

Prenons maintenant V un ouvert de S/G (i.e. $\pi^{-1}(V)$ est ouvert dans S) et $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. La Proposition 2.3 implique que $f \circ \pi$ est bien holomorphe. Réciproquement soit $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ une application telle que $f \circ \pi$ est holomorphe, et $p \in S$. En un point $p \notin F$, (A2) montre que π est un biholomorphisme local et donc $f = (f \circ \pi) \circ \pi^{-1}$ est holomorphe en $\pi(p)$. Comme $\pi(F)$ est discret, il suffit de voir que f est continue en tout point de $\pi(F)$ pour conclure qu'elle est holomorphe en ces points (car toute fonction holomorphe bornée sur \mathbb{D}^* s'étend à l'origine). Mais la continuité de f en $\pi(p)$ résulte du fait que la restriction de π à la carte U_p est continue et vérifie $\pi^{-1}(\pi(p)) \cap U_p = \{p\}$.

Enfin supposons que $h : S \rightarrow S'$ une application holomorphe G -équivariante, i.e. $h(g \cdot p) = h(p)$ pour tout $p \in S$ et tout $g \in G$. Pour $q \in S/G$, on choisit $p \in \pi^{-1}\{q\}$ et on pose $\bar{h}(q) := h(p)$. Cette définition ne dépend pas du choix de p car pour un autre choix $p' \in \pi^{-1}\{q\}$ on peut trouver un élément $g \in G$ vérifiant $g \cdot p = p'$ et $h(p') = h(g \cdot p) = h(p)$.

L'application ainsi définie est continue, et holomorphe en dehors de $\pi(F)$ donc partout. Les détails de la démonstrations sont identiques aux arguments précédents. et laissées aux lecteurs. \square

REMARQUE 3.8. La démonstration donne des informations précises sur la structure locale de l'application $\pi : S \rightarrow S/G$. En effet, supposons que l'action de G sur S soit fidèle.

Lorsque le stabilisateur de $p \in S$ est trivial (i.e. réduit au neutre de G) alors π est un biholomorphisme local de (S, p) sur $(S/G, \pi(p))$.

Sinon le stabilisateur de p est fini cyclique d'ordre k , et dans des coordonnées holomorphes adéquates centrées en p et $\pi(p)$, on peut écrire $\pi(z) = z^k$.

3.3. Exemples.

Le quotient de \mathbb{C} par la translation $z \mapsto z + 1$ est isomorphe à \mathbb{C}^* . En effet l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est invariante par l'action du groupe, et donc induit une application du quotient $\mathbb{C}/\langle z + 1 \rangle$ vers \mathbb{C}^* . On vérifie facilement que cette application est bijective.

Le quotient de \mathbb{C} par une rotation d'angle $\frac{2i\pi}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à \mathbb{C} . Cette fois-ci l'isomorphisme est donné par l'application $z \mapsto z^q$.

Le quotient du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} par la translation $z \mapsto z + 1$ est isomorphe au disque épointé. L'isomorphisme est donné par l'application $z \mapsto e^{2i\pi z}$. Le quotient du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} par une homothétie $z \mapsto az$ avec $a > 1$ est cette fois-ci isomorphe à l'anneau $\{1 < |z| < \exp(2\pi^2/\log|a|)\}$, et l'isomorphisme est donnée par l'application $z \mapsto \exp(2i\pi \frac{\log(z)}{\log(a)})$ où \log est la détermination du logarithme telle que $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ avec $0 < r$ et $0 < \theta < \pi$.

REMARQUE 3.9. Un groupe qui agit à la fois de manière holomorphe et totalement discontinue sur une surface de Riemann S compacte est nécessairement fini, car il suffit de prendre $K = S$ dans la Définition 3.2. Cette remarque s'applique en particulier lorsque S est la sphère de Riemann. On peut même démontrer que le quotient de la sphère de Riemann par un groupe fini quelconque est toujours isomorphe à la sphère de Riemann. C'est une conséquence de la formule de Riemann-Hurwitz (voir le Théorème 2.15 du Chapitre C). On n'obtient donc aucun exemple nouveau par une telle construction.

REMARQUE 3.10. On verra à la Section 2.8 du Chapitre B que le Théorème d'uniformisation implique que *toute* surface de Riemann qui n'est pas isomorphe à \mathbb{C} , \mathbb{C}^* , S^2 ou une courbe elliptique est isomorphe au quotient \mathbb{D}/G où G est un groupe qui agit proprement discontinûment et sans point fixe sur \mathbb{D} .

Bibliographie

- [Ah] AHLFORS, LARS. V. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp. McGraw-Hill, 1966.
- [Ca] CARTAN, H. *Calcul différentiel*. (French) Hermann, Paris 1967 178 pp.
- [Ch] CHIRKA, E. M. *Complex analytic sets*. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 46. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. xx+372 pp.
- [Do] DONALDSON, S.. *Riemann surfaces*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2011.
- [Hö] HÖRMANDER, LARS. *An introduction to complex analysis in several variables*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London 1966 x+208 pp.
- [Ru] RUDIN, WALTER. *Analyse réelle et complexe*. (French) [Real and complex analysis] Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman. Third printing. Masson, Paris, 1980. x+397 pp.
- [SG] DE SAINT-GERVAIS, HENRI PAUL. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. (French) [Uniformization of Riemann surfaces] *Retour sur un théorème centenaire*. [A look back at a 100-year-old theorem]. The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévenec, and Jean-Claude Sikorav. ENS Éditions, Lyon, 2010. 544 pp.
- [Si] SILVERMAN, JOSEPH H. *The arithmetic of elliptic curves*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer, Dordrecht, 2009. xx+513 pp.

Exercices

EXERCICE A.1 (Formule de Cauchy généralisée). Soit K un compact de \mathbb{C} à bord C^1 . Pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 alors

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_K \frac{1}{\pi(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dwd\bar{w}.$$

On admettra la formule de Green-Riemann : pour toutes applications lisses P, Q on a

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int_K \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy$$

où le bord de K est orienté par la normale extérieure et x, y sont des variables réelles.

EXERCICE A.2.

- (1) (Théorème de Montel) Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes telles que $|f_n| \leq M$ pour une constante $M > 0$.
 - Montrer que pour tout compact K , on a $\sup_{K,n} |f'_n| < +\infty$. On pourra appliquer les estimées de Cauchy.
 - Montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} convergente uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction analytique.
- (2) (Théorème de Hurwitz) Montrer que si les f_n sont univalentes, alors soit f est constante soit f est univalente. On pourra utiliser le théorème de Rouché.

EXERCICE A.3.

- (1) (Théorème de Moreira) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pour tout lacet \mathcal{C}^1 par morceaux. En appliquant l'hypothèse à des lacets bordant des rectangles, montrer que $F(z) := \int_{[0,z]} f(w)dw$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann puis que f est holomorphe.
- (2) (Principe de réflexion de Schwarz) Supposons que
 - f est holomorphe sur $\{|z| < 1\} \cap \{\text{Im}(z) > 0\}$;
 - f s'étend continûment sur l'axe réel;
 - $f(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

En utilisant le théorème de Moreira, montrer que f s'étend en une application holomorphe à tout le disque unité.

◇

EXERCICE A.4. Soit $f : S \rightarrow S'$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann connexes. L'ensemble de ramification de f est le complémentaire des points $p \in S$ pour lesquels f induit un biholomorphisme d'un voisinage de p sur son image.

- (1) Montrer que si f n'est pas constante, alors l'ensemble de ramification est un ensemble discret.

- (2) Donner un exemple d'application où l'ensemble de ramification est infini.
- (3) Montrer que l'image de l'ensemble de ramification est toujours un ensemble dénombrable. Montrer que cet image est discrète lorsque f est propre.
- (4) Donner un exemple d'application où l'image de l'ensemble de ramification admet un point d'accumulation.

EXERCICE A.5. Soit $f : S \rightarrow S$ une application holomorphe d'une surface de Riemann connexe dans elle-même.

- (1) Montrer que l'ensemble $\{p \in S, f(p) = p\}$ des points fixes de f est discret.
- (2) Donner un exemple pour lequel cet ensemble est infini.
- (3) On suppose que f est un polynôme de degré $d \geq 2$ et $S = \mathbb{C}$.
 - Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(z)| + 1 \geq C(|z| + 1)^d$ pour tout z .
 - En déduire que l'ensemble des points périodiques $P(f) := \{p \in S, \exists n \geq 1, f^n(p) = p\}$ est borné.
 - Supposons que 0 soit un point fixe de f . Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que 0 est alors solution du polynôme $f^n(z) - z$. On note μ_n la multiplicité de 0 comme solution du polynôme $f^n(z) - z$.
 - Montrer que la suite μ_n est borné.
 - En déduire que $P(f)$ est infini.

EXERCICE A.6. Soit $f : S \rightarrow S'$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann connexes. Si S est compact montrer que soit f est constante soit f est surjective et S' est compact.

EXERCICE A.7. Montrer que si une application holomorphe $f : S \rightarrow S'$ entre deux surfaces de Riemann est bijective alors son inverse est holomorphe (en d'autres termes un biholomorphisme est une application holomorphe bijective).

◇

EXERCICE A.8. Montrer que toute application holomorphe de la sphère de Riemann dans elle-même est donnée par une fraction rationnelle $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$.

EXERCICE A.9 (Produit de Blaschke). Soit f une application continue du disque fermé \mathbb{D} dans \mathbb{C} , holomorphe dans le disque ouvert. On suppose que $|f(z)| = 1$ pour tout point z sur le cercle S^1 .

- (1) Montrer que si f ne s'annule pas alors f est constante.
- (2) En utilisant l'isomorphisme entre le disque et le demi-plan de Poincaré, et le principe de réflexion de Schwarz, montrer que la fonction f s'étend en une fonction méromorphe de la sphère de Riemann.

(3) Conclure qu'il existe $\zeta \in S^1$ et des $a_i \in \mathbb{D}$ tels que

$$f(z) = \zeta \prod_{i=1}^k \frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i}z}.$$

Une telle application est appelé produit de Blaschke.

EXERCICE A.10. Montrer que l'application de $GL(2, \mathbb{C})$ dans le groupe des biholomorphismes de S^2 envoyant la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vers l'homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est un morphisme de groupe.

Montrer que l'injection $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ induit un morphisme injectif de $PSL(2, \mathbb{R})$ vers $PGL(2, \mathbb{C})$.

EXERCICE A.11 (Transitivité de $PGL(2)$).

- (1) Montrer que pour tout triplet de points $a, b, c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ il existe un unique biholomorphisme $\varphi \in PGL(2, \mathbb{C})$ tel que $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, et $\varphi(\infty) = c$ (i.e. $PGL(2, \mathbb{C})$ agit 3-transitivement sur la sphère de Riemann).
- (2) On définit le bi-rapport de 4 points $a, b, c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ comme le quotient

$$[a : b : c : d] := \frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}.$$

Montrer que $[\varphi(a) : \varphi(b) : \varphi(c) : \varphi(d)] = [a : b : c : d]$ pour tout $\varphi \in PGL(2, \mathbb{C})$. On pourra montrer que le birapport est l'image de d par l'unique homographie envoyant a sur 0, b sur 1 et c sur ∞ .

- (3) En déduire que $PGL(2, \mathbb{C})$ n'agit pas 4-transitivement sur la sphère de Riemann.

◇

EXERCICE A.12 (Applications holomorphes entre tores). Dans cet exercice, on admettra le théorème de relèvement suivant. Pour toute application continue $h : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$, il existe une application continue $H = (H_1, H_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$h(\exp(2i\pi\theta), \exp(2i\pi\theta')) = (\exp(2i\pi H_1(\theta, \theta')), \exp(2i\pi H_2(\theta, \theta')))$$

pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

Soient $\omega, \omega' \in \mathbb{H}$. Pour simplifier on note $\Lambda = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ et $\Lambda' = \mathbb{Z} + \omega'\mathbb{Z}$.

- (1) Montrer que \mathbb{C}/Λ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.
- (2) Soit $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ une application holomorphe. Montrer qu'il existe une application affine $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $L(z) = az + b$ telle que $a\Lambda \subset \Lambda'$, et $[L(z)]' = h([z])$, où $[z]$ (resp. $[z]'$) dénote la classe de z dans \mathbb{C}/Λ (resp. \mathbb{C}/Λ').

- (3) Montrer que \mathbb{C}/Λ est biholomorphe à \mathbb{C}/Λ' si et seulement si $\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = +1$. On montrera tout d'abord l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha\Lambda = \Lambda'$.
- (4) On note $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ l'ensemble des applications holomorphes de \mathbb{C}/Λ dans lui-même fixant $[0]$. Montrer que $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est un anneau commutatif isomorphe à l'anneau des $a \in \mathbb{C}$ tels que $a\Lambda \subset \Lambda$.
- (5) Montrer que $\text{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{Z}$ sauf si ω est un nombre quadratique c'est-à-dire vérifie une équation du type $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ avec $a, b, c \in (\mathbb{Z}^*)^2 \times \mathbb{Z}$.

EXERCICE A.13 (Quadriques affines). On se donne un polynôme de degré 2 à 2 variables $P(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$ avec $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq (0, 0, 0)$.

On suppose que $P = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ est vide de telle sorte que $C = \{P = 0\}$ est une surface de Riemann. Montrer que C est biholomorphe à deux copies disjointes de \mathbb{C} , \mathbb{C} ou \mathbb{C}^* .

Pour cela on procèdera à un changement adéquat de coordonnées affines pour simplifier l'expression de P .

◇

EXERCICE A.14 (Automorphismes des tores). On fixe $\omega \in \mathbb{H}$ et on pose $\Lambda = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. On s'intéresse à la structure du groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ des biholomorphismes de \mathbb{C}/Λ . On supposera acquis que pour tout biholomorphisme $h : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ il existe une application affine $L(z) = az + b$, avec $a \neq 0$ telle que $a\Lambda = \Lambda$ et $h[z] = [L(z)]$, où $[z]$ désigne la classe de $z \in \mathbb{C}$ dans l'espace quotient \mathbb{C}/Λ (voir Exercice 3.16).

- (1) Montrer que le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est un groupe fini cyclique.
- (2) Montrer que le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sauf si $\Lambda = \mathbb{C}[i]$, ou $\mathbb{C}[j]$ où j est une racine primitive troisième de l'unité. [on rappelle que les seules racines de l'unité ζ qui vérifient $\zeta^2 = k\zeta - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6].
- (3) Calculer le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ lorsque $\Lambda = \mathbb{C}[i]$.
- (4) Calculer le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ lorsque $\Lambda = \mathbb{C}[j]$.
- (5) Montrer qu'il existe une suite exacte de groupes

$$0 \rightarrow (\mathbb{C}/\Lambda, +) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda) \rightarrow \text{Stab}([0]) \rightarrow 0$$

où $\text{Stab}([0])$ désigne le stabilisateur de $[0]$ pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ sur le tore.

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est-il isomorphe (comme groupe) au produit de $(\mathbb{C}/\Lambda, +)$ et de $\text{Stab}([0])$?

EXERCICE A.15 (Groupes discrets).

- (1) Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X , et H un sous-groupe de G d'indice fini. Montrer que si H agit proprement discontinûment sur X alors G aussi.
- (2) Considérons l'application bijective qui à un couple $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ associe l'application affine $z \mapsto az + b$. On munit le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ de l'unique topologie de telle sorte que cette application soit un homéomorphisme.
Montrer qu'un sous-groupe G de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ qui est finiment engendré agit proprement discontinûment sur \mathbb{C} si et seulement si G est discret (au sens où tout point $g \in G$ admet un voisinage U tel que $U \cap G = \{g\}$).
- (3) Montrer le fait précédent sans supposer que G est finiment engendré (question plus difficile).
- (4) On munit $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ de la topologie euclidienne. Montrer que l'application naturelle $\pi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ est un morphisme de groupe dont le noyau est fini. Construire une métrique sur $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ qui rend π continue.
- (5) Montrer qu'un sous-groupe G de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ agit proprement discontinûment sur S^2 si et seulement si G est fini.
- (6) Caractériser les $g \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ qui engendrent un groupe discret dans $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$, et construire des groupes discrets de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ qui n'agissent pas proprement discontinûment sur S^2 .
- (7) Soit $x \in \mathbb{H}$ et K un compact de \mathbb{H} . Montrer que l'ensemble des $f \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tels que $f(x) \in K$ est compact dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. On pourra se ramener au cas du disque et du point 0.
- (8) Soit G un sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Montrer qu'un sous-groupe G de $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} si et seulement si il est discret.

Groupe fondamental et Théorie des revêtements

Le but de ce chapitre est d'introduire un des objets de base de la topologie algébrique, une théorie qui se propose "d'algébriser" les espaces topologiques. Si cette phrase n'est pas à prendre dans un sens littéral, il est remarquable que l'on puisse effectivement associer des objets de nature algébrique (groupe, anneau, algèbre, etc.) à tout espace topologique de telle sorte que ces objets contiennent de l'information suffisante pour que l'on puisse en déduire des applications topologiques frappantes.

Nous nous restreindrons dans ce cours à la notion de groupe fondamental, introduite à la fin du XIXème siècle par Poincaré. Le groupe fondamental d'un espace se définit comme l'espace de ses lacets (basés en un point donné a priori) à homotopie près. Ce groupe ne contient qu'une très faible information sur la nature topologique de l'espace (les espaces affines de toute dimension ont un groupe fondamental trivial). Cependant nous verrons que le simple calcul de ce groupe dans le cas du cercle nous amènera au théorème de Brouwer ainsi qu'au théorème de l'invariance du domaine dans le plan.

Nous introduirons alors la notion de revêtement et expliquerons comme le groupe fondamental peut être vu comme un moyen de classer tous les revêtements d'un espace donné (au moins lorsque ce dernier n'est pas trop sauvage).

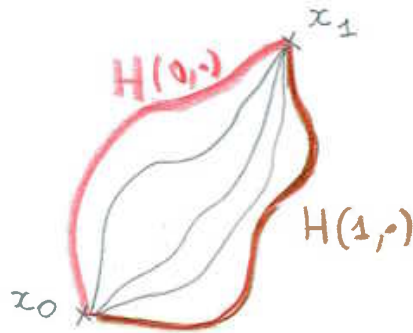
1. Le groupe fondamental

La notion de groupe fondamental permet d'associer à tout espace topologique marqué un groupe. Nous en donnons la définition (§1.1). Nous définissons alors les espaces simplement connexes comme ceux ayant un groupe fondamental trivial et montrons que les sphères de dimension au moins 2 sont de tels espaces (§1.2). Nous calculons ensuite le groupe fondamental du cercle (§1.3). Ces calculs nous permettront d'obtenir plusieurs applications frappantes (§1.4). Nous discutons enfin la notion de rétraction et de functorialité en §1.5.

1.1. Définition. Dans toute cette section on fixe X un espace topologique séparé.

Un *chemin* d'extrémités x_0, x_1 est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Une *homotopie* de chemin d'extrémités x_0 et x_1 (sous-entendue à bouts ou à extrémité fixés) est la donnée d'une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $H(s, 0) = x_0$ et $H(s, 1) = x_1$ pour tout s . Si $\gamma(t) = H(0, t)$ et $\gamma'(t) = H(1, t)$, on dira que H est une homotopie déformant γ en γ' , ou que H est une homotopie entre les deux chemins γ et γ' .

En termes plus imagés, une homotopie entre deux lacets est la donnée d'une déformation à bouts fixés permettant de passer de l'un à l'autre.



REMARQUE 1.1. On peut aussi définir une notion d'homotopie libre entre deux chemins sans demander que les extrémités soient fixées. Nous n'utiliserons cette notion dans le cours qu'une unique fois pour l'énoncé de la Proposition 1.9.

On peut composer deux chemins dont les extrémités sont compatibles. Soient γ, γ' deux chemins d'extrémités x_0, x_1 et x'_0, x'_1 de telle sorte que $x_1 = x'_0$. On peut alors définir leur composition par la formule :

$$\gamma' \cdot \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Comme $\gamma(1) = \gamma'(0)$, l'application $\gamma' \cdot \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ est bien continue, et définit un chemin d'extrémités x_0, x'_1 .



PROPOSITION 1.2. La relation d'homotopie dans l'ensemble des chemins d'extrémités fixées x_0 et x_1 est une relation d'équivalence. De plus la loi de composition des chemins passe au quotient par cette relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION. L'homotopie triviale $H(s, t) = \gamma(t)$ "déforme" un chemin donné en lui-même donc la relation d'homotopie est bien réflexive ! Si H est une homotopie déformant γ en γ' , alors $H'(s, t) := H(1 - s, t)$ définit une homotopie déformant γ' en γ ce qui montre que la relation d'homotopie est bien symétrique.

Elle est aussi transitive : en effet soient H_1 et H_2 deux homotopies déformant γ_1 en γ_2 et γ_2 en γ_3 . L'application définie par $H(s, t) := H_1(2s, t)$ pour $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ et $H(s, t) := H_2(2s - 1, t)$ pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ est bien une homotopie continue qui déforme γ_1 en γ_3 .

Pour montrer la dernière assertion, choisissons deux paires de chemins γ_1, γ'_1 et γ_2, γ'_2 telles que $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$; $x_1 := \gamma_1(1) = \gamma'_1(0) = \gamma_2(1) = \gamma'_2(0)$; et $x_2 := \gamma'_1(1) = \gamma'_2(1)$. Supposons données deux homotopies H et H' déformant respectivement γ_1 et γ'_1 sur γ_2 et γ'_2 . L'homotopie \tilde{H} définie alors par $\tilde{H}(s, t) = H(s, 2t)$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\tilde{H}(s, t) = H'(s, 2t - 1)$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ déforme bien $\gamma'_1 \cdot \gamma_1$ en $\gamma'_2 \cdot \gamma_2$, ce qui montre que la loi de composition des chemins passe au quotient par la relation d'homotopie. \square

Un *lacet* est un chemin dont les deux extrémités sont identiques. Fixons désormais un point $x_0 \in X$ (la donnée d'une paire constituée d'un espace topologique et d'un point dessus est appelée *espace topologique pointé*).

Notons $\Pi(X, x_0)$ l'ensemble des lacets d'extrémité x_0 modulo la relation (d'équivalence) d'homotopie. Si γ est un lacet d'extrémité x_0 , on note $[\gamma]$ la classe qu'il induit dans $\pi_1(X, x_0)$.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.3. *La loi de composition des lacets induit sur $\Pi(X, x_0)$ une loi de groupe de telle sorte que l'élément neutre est représenté par le lacet constant $c(t) = x_0$, et l'inverse $[\gamma]^{-1}$ est déterminé par la classe du lacet $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$.*

Le groupe ainsi obtenu est appelé groupe fondamental de l'espace pointé (X, x_0) et on le note $\pi_1(X, x_0)$.

REMARQUE 1.4. La classe de l'inverse d'un lacet est le même lacet parcouru en sens "inverse".

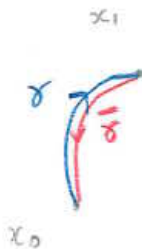
DÉMONSTRATION. Notons que la composition de deux lacets de même extrémité x_0 est encore un lacet d'extrémité x_0 . La Proposition 1.2 montre de plus qu'étant donnés des lacets γ_1, γ'_1 chacun homotopes à d'autres lacets γ_2, γ'_2 , alors leurs composées $\gamma'_1 \cdot \gamma_1$ et $\gamma'_2 \cdot \gamma_2$ sont encore homotopes. En d'autres termes, si $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ et $[\gamma'_1] = [\gamma'_2]$ alors on a $[\gamma'_1 \cdot \gamma_1] = [\gamma'_2 \cdot \gamma_2]$. Pour deux lacets γ et γ' on peut donc poser $[\gamma'] \cdot [\gamma] := [\gamma' \cdot \gamma]$ ce qui définit bien une loi sur l'ensemble $\Pi(X, x_0)$.

La vérification que cette loi est bien une loi de groupe n'est pas difficile en soi. Cependant pour alléger la démonstration, on introduit la notion de reparamétrisation d'un lacet. Un lacet γ' est une *reparamétrisation* de γ si il existe une application continue $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $\gamma'(t) = \gamma(\theta(t))$. Notons que lorsque $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$ (ou 0), alors γ' est homotope à γ par l'homotopie (à extrémités fixées) $H(s, t) = \gamma((1 - s)\theta(t) + st)$.

Montrons tout d'abord que la loi est associative. Pour ce faire, prenons γ, γ' et γ'' trois lacets d'extrémité x_0 . L'associativité résulte alors du fait que le lacet $\gamma'' \cdot (\gamma' \cdot \gamma)$ est obtenu par reparamétrisation du lacet $(\gamma'' \cdot \gamma')$ par l'application $\theta(t) = \frac{t}{2}$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\theta(t) = t - \frac{1}{4}$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$, et $\theta(t) = 2t - 1$ pour $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$.

Montrons maintenant que le lacet constant $c(t) := x_0$ est l'élément neutre. En effet $c \cdot \gamma$ est obtenu par reparamétrisation de γ par l'application $\theta(t) = 2t$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, et $\theta(t) = 1$ sinon. Et $\gamma \cdot c$ est obtenu par reparamétrisation de γ par l'application $\theta(t) = 0$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, et $\theta(t) = 2t - 1$ sinon.

Enfin notons $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$. Le lacet $\bar{\gamma} \cdot \gamma$ est obtenu par reparamétrisation de γ par l'application "tente" $\theta(t) = 2t$ pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\theta(t) = 1 - 2t$ pour $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Et l'homotopie $H(s, t) := \gamma((1 - s)\theta(t))$ déforme $\bar{\gamma} \cdot \gamma$ en le lacet constant ce qui montre que $[\bar{\gamma}]$ est l'inverse de $[\gamma]$. \square



REMARQUE 1.5. Le groupe fondamental fait partie d'une suite de groupes $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ obtenus en regardant des classes d'homotopie d'applications continues de sphères (pointées) de dimension plus grande dans (X, x_0) . Les groupes ainsi obtenus ont une importance théorique très importantes. Cependant calculer ces groupes même pour les sphères s'avère un problème extrêmement difficile. Nous ne les utiliserons pas dans ce cours. Nous renvoyons à [Ha, Chapter 4] pour leurs définitions et leurs propriétés principales.

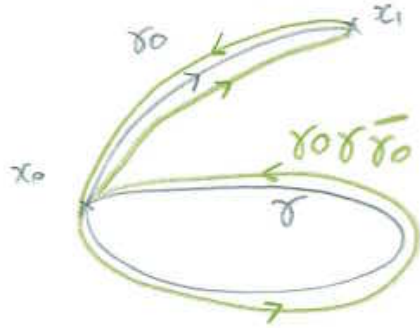
REMARQUE 1.6. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Notons X_0 la partie connexe par arcs de X contenant x_0 et maximale (pour l'inclusion) pour ces deux propriétés. Comme tout lacet partant d'extrémité x_0 est inclus dans X_0 on voit que $\pi_1(X, x_0)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(X_0, x_0)$.

Dans la suite nous nous restreindrons donc toujours à des espaces topologiques connexes par arcs. Pour le développement de la théorie des revêtements, nous verrons même qu'il faudra imposer quelques hypothèses supplémentaires sur la topologie de X . On pourra toujours penser dans la suite à un espace X comme une variété pour fixer les idées.

Soit maintenant X un espace topologique connexe par arcs. Fixons x_0 et x_1 deux points dans X , et γ_0 un chemin d'extrémités x_0 et x_1 . Étant donné un lacet γ d'extrémité x_0 , on remarque que le chemin $\gamma_0 \cdot (\gamma \cdot \bar{\gamma}_0)$ définit un lacet d'extrémité x_1 .

PROPOSITION 1.7. *L'application $\gamma \mapsto \gamma_0 \cdot (\gamma \cdot \bar{\gamma}_0)$ induit par passage au quotient par la relation d'homotopie un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$.*

En d'autres termes, le groupe fondamental ne dépend pas du choix de point base. Il faut faire attention cependant que l'isomorphisme entre les deux groupes



fondamentaux dépend lui du choix de chemin γ_0 reliant x_0 et x_1 (ou plus précisément de sa classe d'homotopie !)

DÉMONSTRATION. On remarque tout d'abord que le lacet $\gamma_0 \cdot (\gamma \cdot \bar{\gamma}_0)$ est obtenu par reparamétrisation du lacet obtenu en concaténant tout d'abord $\bar{\gamma}_0(3t)$ sur $[0, 1/3]$ puis $\gamma(3t - 1)$ sur $[1/3, 2/3]$ et enfin $\gamma_0(3 - 3t)$ sur $[2/3, 1]$. Nous noterons $\gamma_0 \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma}_0$ ce lacet.

Si γ est homotope à γ' par H , le lacet $\gamma_0 \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma}_0$ est homotope à $\gamma_0 \cdot \gamma' \cdot \bar{\gamma}_0$ par l'homotopie H_0 qui est triviale sur les segments $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ et égale à $H(3s - 1, \cdot)$ sur $[1/3, 2/3]$. L'application $\varphi(\gamma) := \gamma_0 \cdot (\gamma \cdot \bar{\gamma}_0)$ passe donc bien au quotient par la relation d'homotopie.

Fixons deux lacets γ et γ' . Le lacet $(\gamma_0 \cdot \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}_0) \cdot (\gamma_0 \cdot \gamma' \cdot \bar{\gamma}_0)$ est obtenu par reparamétrisation du lacet $h := \gamma_0 \cdot \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}_0 \cdot \gamma_0 \cdot \gamma' \cdot \bar{\gamma}_0$ (qui est obtenu en parcourant $\bar{\gamma}_0$ sur $[0, 1/6]$ et ainsi de suite). Puis on remarque que l'homotopie définie par $H(s, t) = h(t)$ si $t \notin [1/3, 2/3]$, $H(s, t) = \gamma_0((1 - s)(6t - 2))$ si $t \in [1/3, \frac{1}{2}]$, et $H(s, t) = \gamma_0((1 - s)(4 - 6t))$ si $t \in [\frac{1}{2}, 2/3]$ déforme h en le lacet $\gamma_0 \cdot \bar{\gamma} \cdot c \cdot c \cdot \gamma' \cdot \bar{\gamma}_0$ où c est le lacet constant égal à x_0 . Ce dernier lacet est une reparamétrisation de $\gamma_0 \cdot \bar{\gamma} \cdot \gamma' \cdot \bar{\gamma}_0$ qui est lui-même homotope à $\gamma_0 \cdot ((\bar{\gamma} \cdot \gamma') \cdot \bar{\gamma}_0)$ et donc φ est bien un morphisme de groupes.

Enfin c'est un isomorphisme et son inverse est donné par l'application $\psi(\gamma) := \bar{\gamma}_0 \cdot \gamma \cdot \gamma_0$. En effet, $\varphi(\psi(\gamma))$ est représenté par le lacet $\bar{\gamma}_0 \cdot (\gamma_0 \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma}_0) \cdot \gamma_0$ qui est homotope à $\bar{\gamma}_0 \cdot \gamma_0 \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma}_0 \cdot \gamma_0$, puis à γ comme ci-dessus. \square

REMARQUE 1.8. Au niveau des lacets les applications $\gamma \mapsto \gamma_0 \cdot (\gamma \cdot \bar{\gamma}_0)$ et $\gamma \mapsto (\gamma_0 \cdot \gamma) \cdot \bar{\gamma}_0$ ne sont pas identiques. Cependant les morphismes qu'elles induisent sur les groupes fondamentaux sont les mêmes.

1.2. Espaces simplement connexes. Nous avons défini à la Section 2.6 du Chapitre A la notion de surface de Riemann simplement connexe. Cette notion se définit naturellement dans le cadre plus général des espaces topologiques.

DÉFINITION. Un espace topologique est dit *simplement connexe* si il est connexe par arcs et son groupe fondamental se réduit à son élément neutre.

PROPOSITION 1.9. *Soit X est un espace topologique connexe par arcs. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est réduit à l'élément neutre.
 (2) Deux chemins ayant même extrémité sont homotopes.
 (3) Deux lacets quelconques (n'ayant pas forcément les mêmes extrémités) sont librement homotopes.

DÉMONSTRATION. (1) \Rightarrow (2) Soient γ_1 et γ_2 deux chemins ayant x et x' pour extrémités. Leur composition $\bar{\gamma}_2 \cdot \gamma_1$ est un lacet d'extrémité x et par (1), il existe une homotopie H (d'extrémité x fixée) qui le déforme en le lacet constant. Pour obtenir une homotopie à extrémités fixées x et x' , on parcourt pour $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ une moitié de $H(2s, \cdot)$ puis on parcourt $H(\cdot, \frac{1}{2})$. Et enfin pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, on parcourt une moitié de $H(2 - 2s, \cdot)$ puis $H(\cdot, \frac{1}{2})$. En termes explicites, la nouvelle homotopie est donnée par :

$$\begin{cases} H'(s, t) = H\left(2s, \frac{t}{(2-4s)}\right) & 0 \leq t \leq 1 - 2s \\ H'(s, t) = H\left(1 - t, \frac{1}{2}\right) & 1 - 2s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

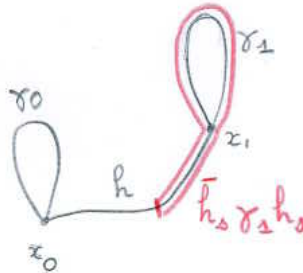
pour $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, et

$$\begin{cases} H'(s, t) = H\left(2 - 2s, 1 - \frac{t}{4s-2}\right) & 0 \leq t \leq 2s - 1 \\ H'(s, t) = H\left(1 - t, \frac{1}{2}\right) & 2s - 1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. L'application H' est continue : c'est clair en dehors du point $(s, t) = (\frac{1}{2}, 0)$. On observe que $H(s, t) \rightarrow x$ pour $s \rightarrow 1$ (et t arbitraire), et donc H' est bien continue en $(\frac{1}{2}, 0)$. On obtient alors une homotopie à bouts fixés en x et x' qui déforme γ_1 en γ_2 .

(2) \Rightarrow (3). Choisissons deux lacets γ_0 et γ_1 l'un d'extrémité x_0 et l'autre d'extrémité x_1 . On fixe un chemin h reliant x_0 à x_1 tel que $h(0) = x_0$ et $h(1) = x_1$. Par (2), il existe une homotopie H d'extrémité fixée x_0 déformant γ_0 en le lacet $\bar{h} \cdot (\gamma_1 \cdot h)$.

Notons h_s le lacet défini par $h_s(t) = h((1-s)t + s)$, et regardons l'homotopie $H'(s, t) := \bar{h}_s \cdot (\gamma_1 \cdot h_s)(t)$. Celle-ci n'est pas à extrémité fixée mais pour tout s l'application $t \mapsto H'(s, t)$ est un lacet, et déforme $\bar{h} \cdot (\gamma_1 \cdot h)$ en le lacet $h(1) \cdot (\gamma_1 \cdot h(1))$ qui est clairement homotope à γ_1 .



(3) \Rightarrow (1). Soit γ un lacet d'extrémités x_0 . Par (3), il existe une homotopie H déformant γ en le lacet constant c , mais cette homotopie n'est a priori pas à bouts fixés. On a uniquement $e(s) := H(s, 0) = H(s, 1)$ pour tout s , ainsi que $e(0) = e(1) = x_0$. On définit alors une nouvelle homotopie H' de la manière suivante :

$$\begin{cases} H'(s, t) = e(2t) & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ H'(s, t) = H\left(s, \frac{2t-s}{2(1-s)}\right) & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ H'(s, t) = e(2 - 2t) & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cette homotopie déforme toujours γ en $\bar{e} \cdot e$ (lui-même homotope au lacet constant) mais cette fois-ci est à extrémités fixées. Ce qui démontre que la classe de γ dans $\pi_1(X, x_0)$ est triviale. \square

EXEMPLE 1.1. Le groupe fondamental de toute partie convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ est trivial, donc \mathcal{C} est simplement connexe. En effet, on peut supposer par translation que l'origine appartient à \mathcal{C} , et choisir 0 comme point base. L'application $H(s, t) = s\gamma(t)$ induit une homotopie du lacet γ au lacet constant, et donc $\pi_1(\mathcal{C}, 0) = \{1\}$.

Concluons cette section par une démonstration du résultat suivant, évoqué à la page 27.

THÉORÈME 1.10. *Une sphère de dimension au moins 2 est simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. On fixe un entier $n \geq 2$, et on considère la sphère unité S^n de \mathbb{R}^{n+1} . Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^n$ un lacet continu quelconque. On remarque tout d'abord que si γ évite un point p , alors γ est à valeurs dans $S^n \setminus \{p\}$ qui est homéomorphe à \mathbb{R}^n , et peut donc être homotoper à un point.

Option 1. On montre que l'on peut construire une homotopie déformant γ en un lacet qui évite un point. On recouvre la sphère S^n par deux cartes (U_0, φ_0) et (U_1, φ_1) de telle sorte que $\varphi_\varepsilon : U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit un homéomorphisme pour $\varepsilon = 0, 1$ (on peut par exemple prendre la projection stéréographique à partir de deux points distincts sur la sphère).

Comme $[0, 1]$ est compact, γ est uniformément continu et on peut donc trouver un ensemble fini I_1, \dots, I_m d'intervalles $I_j = [a_j, b_j]$ avec $a_0 = 0$, $b_j = a_{j+1}$, et $b_m = 1$ tels que $\gamma(I_j) \subset U_{\varepsilon_j}$ pour tout j et $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$.

On définit alors l'homotopie suivante

$$H(s, t) = \varphi_{\varepsilon_j}^{-1}((1-s)\gamma(t) + s((1-t)\gamma(a_j) + t\gamma(b_j)))$$

pour $s \in [0, 1]$ et $t \in I_j$. Cette homotopie est constante en tous les points a_j, b_j et donc en particulier à extrémités fixées, et elle déforme $\gamma|_{I_j}$ en le lacet affine dans la carte U_{ε_j} joignant les deux points $\gamma(a_j)$ et $\gamma(b_j)$.

Soit γ' le lacet $H(1, \cdot)$. On remarque que $\gamma'(I_j)$ est un compact d'intérieur vide dans U_{ε_j} et donc $S^n \setminus \gamma'(I_j)$ est un ouvert dense. Il s'ensuit que $S^n \setminus \gamma'[0, 1] = \bigcap_{i=1}^m S^n \setminus \gamma'(I_i)$ reste un ouvert dense et donc évite au moins un point de la sphère.

Option 2. Soit $N = (0, \dots, 0, 1)$ On suppose que γ n'est pas un lacet constant, et on fixe $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ assez petit tel que $\gamma([0, 1])$ ne soit pas contenu dans la boule ouverte $B(N, \epsilon)$ de centre N et de rayon ϵ . On va montrer que l'on peut construire une homotopie déformant γ en un lacet qui évite N .

Rappelons que l'intersection de la boule $\overline{B(N, \epsilon)}$ dans \mathbb{R}^{n+1} avec la sphère S^n est homéomorphe à une boule fermée de \mathbb{R}^{n-1} (par exemple par la projection stéréographique de centre le pôle sud). On fixe $\Phi : \overline{B(N, \epsilon)} \cap S^n \rightarrow B := \{x \in \mathbb{R}^{n-1}, \|x\| \leq 1\}$ un tel homéomorphisme.

La préimage de la boule $B(N, \epsilon)$ par γ est une union disjointe au plus dénombrable de segments ouverts (a_i, b_i) , $i \in \mathbb{N}$. Pour chaque i , on choisit une homotopie (à extrémités fixées) sur $[a_i, b_i]$ qui déforme $\gamma|_{[a_i, b_i]}$ à un chemin contenu dans $\partial B(N, \epsilon) \cap S^n$. Plus précisément, on considère le plan Π engendré par 0 , $\Phi^{-1}(\gamma(a_i))$ et $\Phi^{-1}(\gamma(b_i))$, et on choisit une application continue $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \partial B(N, \epsilon)$ qui paramétrise l'arc de cercle joignant $\Phi^{-1}(\gamma(a_i))$ et $\Phi^{-1}(\gamma(b_i))$ dans le cercle de centre 0 et de rayon ϵ . Lorsque $\Phi^{-1}(\gamma(a_i))$ et $\Phi^{-1}(\gamma(b_i))$ ne sont pas diamétralement opposés, on choisit l'arc le plus court les joignant, sinon on en choisit l'un des deux grands arcs les joignant au hasard. On pose

$$H_i(s, t) := \Phi^{-1}((1-s)\Phi(\gamma(t)) + s\Phi(\gamma_i(t)))$$

pour $(s, t) \in [0, 1] \times [a_i, b_i]$.

Finalement on définit $H : [0, 1]^2 \rightarrow S^n$ de la manière suivante. Si $t \in [a_i, b_i]$, alors $H(s, t) = H_i(s, t)$; sinon $H(s, t) = \gamma(t)$. Sur chaque rectangle $[0, 1] \times I$ tel que I intersecte un nombre fini de segments $[a_i, b_i]$ l'application H est clairement continue.

Considérons donc une suite $(s_n, t_n) \rightarrow (s_*, t_*)$ avec t_n intersectant un nombre infini de segments $[a_j, b_j]$. Observons que t_* est nécessairement un point du bord d'un tel segment et donc $H(s, t_*) = \gamma(t_*)$ pour tout s . Comme γ est continue, on peut fixer $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ aussi petits que l'on veut tels que $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \eta$ dès que $|t - t'| < \eta'$. Pour n assez grand, on a $|\gamma(t_n) - \gamma(t)| < \eta$. Si $t_n \notin \cup_j [a_j, b_j]$, alors $H(s, t_n) = \gamma(t_n)$ pour tout s , et donc $|H(s_n, t_n) - H(s_*, t_*)| < \eta$. Sinon $t_n \in [a_{j_n}, b_{j_n}]$, et comme les segments (a_j, b_j) sont tous disjoints, on peut supposer que pour j fixé $t_n \in [a_j, b_j]$ pour un nombre fini d'entiers n . On en déduit que $\gamma[a_{j_n}, b_{j_n}]$ est à distance au plus η de $\gamma(a_i)$. L'arc de cercle les joignant est donc de longueur $\leq \eta$ et par construction l'homotopie $H(s, t)$ est aussi à distance au plus η de $\gamma(a_i)$ pour tout $(s, t) \in [0, 1] \times [a_{j_n}, b_{j_n}]$.

On construit ainsi une homotopie du lacet γ à un lacet qui évite N . \square

1.3. Le groupe fondamental du cercle. Le premier calcul non-trivial de groupe fondamental est celui du cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

THÉORÈME 1.11. *L'application $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ envoyant un entier n sur la classe d'homotopie du lacet $\omega_n(t) := \exp(2i\pi nt)$ est un isomorphisme de groupes.*

La démonstration de ce résultat est importante en ce sens qu'elle porte en germes de nombreuses idées que nous exploiterons à la section suivante dans l'étude des revêtements.

DÉMONSTRATION. Dans toute la démonstration, on note $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(t) = e^{2i\pi t}$ l'application qui identifie le cercle au quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Montrons tout d'abord que $\omega(n) := [\omega_n]$ est bien un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $\pi_1(S^1, 1)$. Pour toute paire d'entiers $n, m \in \mathbb{Z}$, le lacet composé $\omega_m \cdot \omega_n$ est homotope à ω_{n+m} . En effet, $\omega_m \cdot \omega_n$ est l'image par π de l'application continue $h(t) = 2nt$ sur $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $h(t) = m(2t - 1) + n$ sur $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. L'application

$$H(s, t) := \pi((1 - s)h(t) + s(n + m)t)$$

définit alors bien une homotopie déformant $\omega_m \cdot \omega_n$ en ω_{n+m} . Le point ici est que $h(1) = m + n$ et donc H définit bien une homotopie à extrémités fixées.

On va maintenant montrer que ω est un isomorphisme. Étant donné un chemin dans \mathbb{R} dont les extrémités sont des entiers, alors son image par π est un lacet dans le cercle d'extrémité 1. Le point essentiel est que tout lacet d'extrémité 1 est obtenu de cette façon.

Plus précisément nous aurons besoin du lemme technique suivant.

LEMME 1.12. *Soit X un espace topologique, $f : [0, 1] \times X \rightarrow S^1$ et $\tilde{F} : \{0\} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues telles que $\pi \circ \tilde{F} = f|_{\{0\} \times X}$. Alors il existe une unique application continue $F : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ F = f$ et $F = \tilde{F}$ sur $\{0\} \times X$.*

Montrons maintenant que ω est surjective. Pour cela on choisit γ un lacet du cercle d'extrémité 1 et on applique le lemme précédent avec X un point, $f = \gamma$, et $\tilde{F}(0) = 0$. On obtient alors une application continue $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ F = \gamma$, et on peut alors homotoper γ à $\omega_{F(1)}$ par l'homotopie $H(s, t) := \pi((1 - s)F(t) + sF(1)t)$.

Montrons que ω est injective. Supposons que H soit une homotopie (à extrémités fixées) déformant ω_n au lacet trivial. On applique alors le lemme à $X = [0, 1]$, $f = H$, et $\tilde{F}(0, t) = nt$. On obtient donc une application continue $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ F = H$ et $F(0, t) = nt$. Comme $H(s, 1) = 1$ pour tout s , le réel $F(s, 1)$ est nécessairement un entier. Mais l'application $s \mapsto F(s, 1)$ est continue et donc constante égale à $F(0, 1) = n$. Le même argument s'applique pour montrer que $F(s, 0)$ est constant égal à 0, puis que $F(1, t)$ est aussi constant. On en déduit que $n = 0$ ce qui conclut la démonstration. \square

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.12. La démonstration se base sur la propriété fondamentale suivante vérifiée par l'application π et que l'on notera (\star) . Il existe un recouvrement U_α de S^1 par des ouverts tel que $\pi^{-1}(U_\alpha)$ est une union disjointe d'ouverts $V_{\alpha, n}$ tels que $\pi : V_{\alpha, n} \rightarrow U_\alpha$ est un homéomorphisme¹ pour tout n .

Le recouvrement donné par les deux ouverts $S^1 \setminus \{+1\}$ et $S^1 \setminus \{-1\}$ est en réalité suffisant : on a $\pi^{-1}(S^1 \setminus \{+1\}) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$, et $\pi^{-1}(S^1 \setminus \{-1\}) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$.

Dans la suite on se fixe un recouvrement U_α comme ci-dessus.

1. on verra à la section 2 que (\star) est équivalent à dire que π est un revêtement

1. On va tout d'abord démontrer que pour tout $x_0 \in X$ il existe un voisinage $N(x_0)$ de x_0 et une application continue $F_{x_0} : [0, 1] \times N(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ F_{x_0} = f$ et $F_{x_0}(0, x) = \tilde{F}(0, x)$ pour $x \in N(x_0)$.

Par continuité de f , pour tout $t \in [0, 1]$, il existe un ouvert $U_{\alpha(t)}$ et un voisinage de $N(t)$ de x_0 tel que $f(t' \times N(t)) \in U_{\alpha}$ pour tout t' assez proche de t . Par compacité de $[0, 1]$, on peut donc trouver une suite finie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ et des indices α_i tels que $f(t \times N) \in U_{\alpha_i}$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$ avec $N := \cap_i N(t_i)$.

On construit maintenant le relèvement F_{x_0} de proche en proche sur les segments $[t_i, t_{i+1}]$. Sur $[0, t_1]$, on choisit l'ouvert V_{α_0, n_0} de $\pi^{-1}(U_{\alpha_0})$ donné par (\star) qui contient $\tilde{F}(0, x_0)$. Quitte à réduire un peu le voisinage N , on peut supposer que $F_{x_0}(\{0\} \times N) \subset V_{\alpha_0, n_0}$. On note $\pi_0^{-1} : U_{\alpha_0, n_0} \rightarrow V_{\alpha_0}$ l'inverse de π , et on pose $F_{x_0} := \pi_0^{-1} \circ f$ sur $[0, t_1] \times N$. On a alors bien $F_{x_0}(0, x) = \tilde{F}(0, x)$ pour $x \in N(x_0)$.

Supposons que F_{x_0} soit bien définie et continue sur $N \times [0, t_i]$. On considère alors l'unique ouvert $V_{\alpha_i, n_i} \subset \pi^{-1}(U_{\alpha_i})$ donné par (\star) qui contient $F_{x_0}(\{x_0\} \times t_i)$. Comme précédemment on peut réduire un peu le voisinage N , et supposer que $F_{x_0}(\{t_i\} \times N) \subset V_{\alpha_i, n_i}$. On note π_i^{-1} l'inverse de π envoyant U_{α_i} sur V_{α_i} , et on pose alors $F_{x_0} := \pi_i^{-1} \circ f$ sur $N \times [t_i, t_{i+1}]$. Cette définition est compatible sur $\{t_i\} \times N$ car $F_{x_0}(n, t_i)$ est l'unique point de $\pi^{-1}(f(n, t_i))$ contenu dans V_{α_i, n_i} . Ceci conclut la construction du relèvement F_{x_0} sur $[0, 1] \times N(x_0)$.

2. On va maintenant démontrer l'unicité des relèvements lorsque X est réduit à un point. Pour simplifier les notations, on enlève toute référence à X . Supposons donc que F_1 et F_2 soient deux applications continues $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\pi \circ F_1 = \pi \circ F_2 = f$ et $F_1(0) = F_2(0)$. On veut montrer que $F_1 = F_2$. Comme précédemment, on construit une suite $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ telle que $F_1[t_i, t_{i+1}] \subset V_{\alpha(i), n_i}$ pour tout i où $V_{\alpha(i), n_i}$ est un ouvert de $\pi^{-1}(U_{\alpha(i)})$ donné par (\star) . On suppose par récurrence que $F_1 = F_2$ sur $[0, t_i]$.

Comme $[t_i, t_{i+1}]$ est connexe, $F_2[t_i, t_{i+1}]$ l'est encore et est donc inclus dans la composante connexe de $\pi^{-1}(U_{\alpha(i)})$ qui contient $F_2(t_i) = F_1(t_i)$. Comme ce point est dans $V_{\alpha(i), n_i}$, et que $\pi^{-1}(U_{\alpha(i)})$ est l'union disjointe de $V_{\alpha(i), n_i}$ et de son complémentaire, il s'ensuit que $F_2[t_i, t_{i+1}]$ est complètement inclus dans $V_{\alpha(i), n_i}$. On a donc $F_2 = \pi_i^{-1} \circ f$ sur $[t_i, t_{i+1}]$ (avec π_i^{-1} l'inverse de π envoyant $U_{\alpha(i)}$ sur $V_{\alpha(i), n_i}$). Comme par construction $F_1 = \pi_i^{-1} \circ f$ sur $[t_i, t_{i+1}]$, on en déduit bien que $F_1 = F_2$.

3. Expliquons finalement comment les deux points précédents permettent de construire un relèvement de f sur $[0, 1] \times X$. Par le premier point, on peut trouver une famille d'ouverts N_i recouvrant X et des relèvements continus $F_i : [0, 1] \times N_i \rightarrow \mathbb{R}$ de f tels que $\pi \circ F_i = f$ et $F_i(0, x) = \tilde{F}(0, x)$ pour tout $x \in N_i$. Par le second point, il existe un unique relèvement de l'application $f(\cdot, x)$ qui vaut $\tilde{F}(0, x)$ en 0. Par suite, les applications F_i coïncident sur leurs intersections, et définissent donc bien une application $F : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient toutes les conditions requises. Le même argument montre l'unicité d'un tel relèvement. \square

PROPOSITION 1.13. *Soient X et Y deux espaces topologiques connexes par arcs, et $(x_0, y_0) \in X \times Y$. L'application naturelle $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ est un isomorphisme.*

Cette proposition implique immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.14. *Le groupe fondamental du tore réel $(S^1)^n$ de dimension n est isomorphe à \mathbb{Z}^n .*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.13. Expliquons tout d'abord comment l'application $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ est construite. Notons p_1 et p_2 les projections de $X \times Y$ sur X et Y respectivement. Si γ est un lacet de $X \times Y$ d'extrémité (x_0, y_0) alors $p_1 \circ \gamma$ est un lacet d'extrémité x_0 . De plus toute homotopie $H : [0, 1]^2 \rightarrow X \times Y$ entre deux lacets de $X \times Y$ induit une homotopie $p_1 \circ H$ entre leurs images par p_1 . On en déduit donc que l'application $\gamma \mapsto p_1 \circ \gamma$ passe au quotient $(p_1)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette application est bien un morphisme de groupe. On construit de même l'application $(p_2)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Montrons que $\Phi := ((p_1)_*, (p_2)_*)$ est un isomorphisme. Supposons que la classe d'un lacet γ appartienne au noyau de Φ . Il existe donc deux homotopies $H_X : [0, 1] \rightarrow X$ et $H_Y : [0, 1] \rightarrow Y$ telles que $H_X(0, \cdot) = p_1 \circ \gamma$, $H_Y(0, \cdot) = p_2 \circ \gamma$, $H_X(1, \cdot) \equiv x_0$, et $H_Y(1, \cdot) \equiv y_0$. L'application $H := (H_X, H_Y)$ de $[0, 1]^2$ dans $X \times Y$ induit alors une homotopie du lacet γ sur le lacet constant, et donc $[\gamma]$ est le neutre du groupe fondamental de $X \times Y$. Donc Φ est injective.

Soit maintenant γ_X et γ_Y deux lacets arbitraires de X et Y d'extrémité x_0 et y_0 respectivement. Alors $\gamma(t) = (\gamma_X(t), \gamma_Y(t))$ est un lacet de $X \times Y$ d'extrémité (x_0, y_0) et $\Phi[\gamma] = ([p_1 \circ \gamma], [p_2 \circ \gamma]) = ([\gamma_X], [\gamma_Y])$. L'application Φ est donc bien surjective. \square

1.4. Quelques applications frappantes. Les calculs de la section précédente implique toute une série de résultats frappants.

THÉORÈME 1.15 (Théorème de Brouwer). *Toute application continue du disque fermé unité du plan complexe dans lui-même admet au moins un point fixe.*

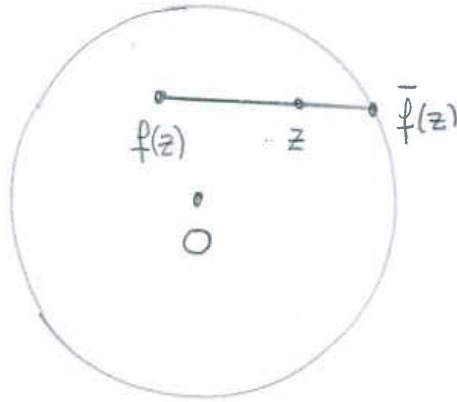
REMARQUE 1.16. Les rotations d'angle non nul possèdent toutes un unique point fixe dans le disque.

DÉMONSTRATION. On procède par contradiction. Soit donc $f : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ une application continue du disque fermé dans lui-même sans point fixe. On peut alors construire une application $\bar{f} : \overline{D(0, 1)} \rightarrow S^1$ de telle sorte que $\bar{f}(z)$ est l'unique point du cercle pour lequel z appartient au segment $[f(z), \bar{f}(z)]$. Le point $\bar{f}(z)$ peut être déterminé en coordonnées de manière explicite. On cherche $t = t(z) \geq 1$ tel que $|f(z) + t(z - f(z))| = 1$ ce qui est équivalent à l'équation

$|f(z)|^2 + t^2|z - f(z)|^2 + 2t\Re(\overline{f(z)}(z - f(z))) - 1 = 0$, et donne

$$t(z) := \frac{-\Re(\overline{f(z)}(z - f(z))) + \sqrt{(\Re(\overline{f(z)}(z - f(z))))^2 + |z - f(z)|^2(1 - |f(z)|^2)}}{|z - f(z)|^2}$$

ce qui montre que $\bar{f}(z) = (z) + t(z)(z - f(z))$ est une application continue.



Le point essentiel est la remarque que $\bar{f}(z) = z$ si $z \in S^1$. Soit γ un lacet quelconque à valeurs dans le cercle et d'extrémité le point 1. L'application $H(s, t) = \bar{f}(s\gamma(t))$ est maintenant une homotopie (libre) du lacet constant vers γ . On obtient une homotopie (libre) dans le cercle S^1 de γ au lacet constant $\bar{f}(0)$. La Proposition 1.9 montre alors que S^1 est simplement connexe, ce qui est absurde car $\pi_1(S^1, 1)$ est non trivial. \square

REMARQUE 1.17. Nous formaliserons cette démonstration à la section suivante en introduisant le concept de rétraction dont \bar{f} est un exemple.

Le théorème suivant est plus subtil.

THÉORÈME 1.18 (Théorème de Borsuk-Ulam²). *Toute application continue f de la sphère S^2 sur \mathbb{R}^2 admet une paire de points antipodaux, c'est-à-dire un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

En particulier une application continue de la sphère dans le plan ne peut être injective. On obtient donc le corollaire intuitivement "évident" suivant.

COROLLAIRE 1.19. *La sphère S^2 n'est pas homéomorphe à un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 .*

2. Borsuk a démontré ce résultat dans les années 30, résultat apparemment suggéré par Ulam qui partira de Pologne pour les États-Unis à la fin des années 30 et contribuera de manière significative au développement des bombes nucléaires et thermo-nucléaires...

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BORSUK-ULAM. On procède par contradiction comme précédemment. Si $f : S^2 \rightarrow S^2$ est une application telle que $f(z) \neq f(-z)$ pour tout z , alors on peut définir l'application continue

$$g(z) = \frac{f(z) - f(-z)}{|f(z) - f(-z)|}$$

de la sphère S^2 vers le cercle S^1 .

On regarde maintenant le lacet image par g du lacet faisant un tour de S^2 le long de l'équateur. C'est un lacet de S^1 donné par

$$\gamma(t) := g(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) .$$

Remarquons que comme la sphère S^2 est simplement connexe, ce lacet est homotope à un lacet trivial. On va montrer qu'il n'en est rien ce qui nous fournira la contradiction recherchée.

Pour cela, on utilise le Lemme 1.12 : il existe donc un relèvement continu $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\gamma(t) = \exp(2i\pi\tilde{\gamma}(t))$ pour tout t . Or $g(-z) = -g(z)$, donc $\gamma(t) = -\gamma(t + \frac{1}{2})$ ce qui implique que $\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t + \frac{1}{2})$ est demi-entier impair pour tout t . Comme cette fonction est continue, on en déduit l'existence d'un entier $q \in \mathbb{Z}$ impair tel que $\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(t + \frac{1}{2}) = \frac{q}{2}$ pour tout t . En particulier, on a $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = q$. En d'autres termes, le lacet γ représente la classe de $(\cos(2q\pi t), \sin(2q\pi t))$ dans le groupe fondamental du cercle et ne peut donc être homotopiquement trivial. \square

THÉORÈME 1.20 (Invariance de la dimension). *Un ouvert de \mathbb{R} ou de \mathbb{R}^2 ne peut être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n uniquement si $n = 1$ ou 2 respectivement.*

REMARQUE 1.21. Les résultats ci-dessus sont en réalité valides en toute dimension. Par exemple deux ouverts de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne peuvent être homéomorphes que si $n = m$. Cependant la démonstration d'un tel résultat requiert l'introduction d'invariants algébriques plus sophistiqués que le groupe fondamental que sont les groupes d'homologie. Nous renvoyons à [Ha, Chapter 2] pour une discussion détaillée de ces groupes abéliens.

DÉMONSTRATION. Soit U un ouvert de la droite réelle. Supposons que U est homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . En particulier chacune de ses composantes connexes est encore homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . On peut donc supposer U connexe. On remarque que $U \setminus \{x\}$ est disconnecté pour tout choix de point $x \in U$. D'autre part si $n > 1$ le complémentaire d'un point dans un ouvert connexe de \mathbb{R}^n reste connexe.

Soit maintenant U un ouvert du plan complexe que l'on suppose comme précédemment connexe, et $f : U \rightarrow V$ un homéomorphisme sur un ouvert V de \mathbb{R}^n . On suppose que $n \geq 3$. Donnons deux arguments pour aboutir à une contradiction.

Premier argument. On fixe une petite boule B dans V , et S une sphère S^2 incluse dans le bord de B (pour cela il suffit de couper le bord de B qui est une sphère de dimension $n - 1 \geq 2$ par un espace affine de dimension 3 qui contient le centre de B). Alors la restriction de f^{-1} à S ne peut être injective par le Théorème de Borsuk-Ulam.

Second argument. Quitte à translater U , cet ouvert contient le point 0. Le lacet $\gamma(t) = \epsilon e^{2i\pi t}$ faisant un tour autour de l'origine est alors inclus dans U si ϵ est un nombre réel assez petit. Le lacet $\gamma' := f \circ \gamma$ est à valeurs dans une petite boule B centrée sur $f(z_0)$ et incluse dans V . Comme γ' évite le centre de B , on peut l'homotoper à un lacet sur le bord de B , i.e. sur une sphère de dimension au moins 2 puis à un lacet constant par le Théorème 1.10. Il s'ensuit que l'on peut trouver une homotopie dans U déformant γ à un lacet constant. En particulier on peut trouver une homotopie de γ à un lacet constant dans \mathbb{C}^* . L'application $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto (|z|, \frac{z}{|z|}) \in \mathbb{R}_+^* \times S^1$ est un homéomorphisme et donc $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ est isomorphe au produit $\pi_1(\mathbb{R}_+^*, 1) \times \pi_1(S^1, 1)$. L'image du lacet γ dans $\pi_1(S^1, 1)$ est égal à la classe du lacet $e^{2i\pi t}$ qui en est un générateur par le Théorème 1.11. On en déduit que γ ne peut être homotopé à un lacet constant dans \mathbb{C}^* , ce qui nous fournit une contradiction. \square

1.5. Rétraction et functorialité. Dans les sections précédentes nous avons utilisé implicitement le fait qu'une application continue entre deux espaces induisait un morphisme entre leurs groupes fondamentaux. Plus précisément nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.22. *Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés et $f : X \rightarrow Y$ une application continue telle que $f(x_0) = y_0$. L'application associant à tout lacet γ dans X d'extrémité x_0 le lacet $f \circ \gamma$ passe au quotient par la relation d'homotopie et induit un morphisme de groupe $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.*

De plus si $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ est une application continue vers un troisième espace topologique telle que $g(y_0) = z_0$, alors $(f \circ g)_ = f_* g_*$.*

DÉMONSTRATION. Si H est une homotopie dans X entre deux lacets γ et γ' d'extrémité x_0 alors $f \circ H$ est une homotopie dans Y entre les lacets $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ d'extrémité $y_0 = f(x_0)$. Ceci montre que l'on peut poser $f_*[\gamma] := [f \circ \gamma]$ et que cela définit bien une application de $\pi_1(X, x_0)$ vers $\pi_1(Y, y_0)$.

C'est de plus un morphisme de groupes car

$$f \circ (\gamma^{-1} \cdot \gamma')(t) = \begin{cases} f \circ \gamma'(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f \circ \bar{\gamma}(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = (f \circ \gamma)^{-1} \cdot (f \circ \gamma')(t).$$

Enfin on a $f_* g_*[\gamma] = f_*[g \circ \gamma] = [f \circ g \circ \gamma] = [(f \circ g) \circ \gamma] = (f \circ g)_*[\gamma]$, ce qui démontre la dernière assertion. \square

REMARQUE 1.23. Mentionnons pour la culture que la proposition précédente s'énonce agréablement dans le langage des catégories. En effet on peut la résumer en disant que le groupe fondamental induit un foncteur covariant de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes. Nous renvoyons à [DD, Chapitre 2] pour une discussion de ces notions.

Nous formalisons maintenant la notion de rétraction qui est apparue dans notre démonstration du Théorème de Brouwer.

DÉFINITION. Soit A une partie d'un espace topologique X .

- Une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \rightarrow A$ dont la restriction à A est l'identité. On dit alors que A est un rétract(e) de X .
- Une *rétraction par déformation* de X sur A est une homotopie déformant l'identité sur X à une rétraction de X sur A , c'est-à-dire une application continue $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ telle que $F(0, \cdot) = \text{id}$, $F(1, X) \subset A$, et $F(1, \cdot)|_A = \text{id}_A$. On dit alors que A est un rétract par déformation de X .
- Une *rétraction forte par déformation* de X sur A est une rétraction par déformation $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ telle que $F(s, \cdot)|_A = \text{id}_A$ pour tout s .

REMARQUE 1.24. Une application continue $r : X \rightarrow X$ est une rétraction de X sur $r(X)$ si et seulement si $r \circ r = r$. La notion de rétraction joue en quelque sorte un rôle analogue à celui de projecteur en algèbre linéaire.

L'importance des notions de rétraction et de rétraction par déformation réside dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.25. *On fixe A une partie d'un espace topologique et x_0 un point de A .*

- (1) *Si A est un rétract de X , alors le morphisme $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induit par l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ est injectif.*
- (2) *Si A est un rétract par déformation de X alors $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Si A est un rétract de X alors il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = \text{id}$. La Proposition 1.22 implique donc que $r_* \circ i_* = \text{id}$ en tant que morphisme de $\pi_1(A, x_0)$ dans lui-même. En particulier i_* est injectif.

Supposons maintenant que A est un rétract par déformation, et prenons γ un lacet quelconque de X d'extrémité x_0 . Soit $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$ une homotopie déformant l'identité sur X sur une rétraction $r : X \rightarrow A$. On va construire une homotopie de γ sur un lacet à valeurs dans A ce qui montrera que la classe de γ dans $\pi_1(X, x_0)$ est égale à la classe de l'image par i_* d'un lacet dans A .

Supposons tout d'abord pour simplifier que F induise une rétraction forte par déformation. Dans ce cas, $t \mapsto F(s, \gamma(t))$ est un lacet d'extrémité x_0 pour tout s et par suite $H(s, t) := F(s, \gamma(t))$ induit bien une homotopie entre $\gamma = F(0, \cdot)$ et $F(1, \cdot)$ qui est un lacet dans A .

Dans le cas général on s'arrange pour ajouter au lacet $t \mapsto F(s, \gamma(t))$ un chemin qui le transforme (continûment) en un lacet d'extrémité x_0 . On peut procéder de la manière suivante, en définissant

$$H(s, t) = \begin{cases} F(t, x_0) & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ F\left(s, \gamma\left(\frac{t-s}{1-2s}\right)\right) & \text{si } s \leq t \leq 1-s \\ F(1-t, x_0) & \text{si } 1-s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pour $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ et

$$H(s, t) = \begin{cases} F(t, x_0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - s \\ F\left(s, \gamma\left(\frac{t-1+s}{2s-1}\right)\right) & \text{si } 1 - s \leq t \leq s \\ F(1 - t, x_0) & \text{si } s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. L'application $H(s, t)$ est alors bien une homotopie déformant γ sur $F(1, \gamma)$ qui est un lacet à valeur dans A . \square

1.6. Exemples et équivalence d'homotopie. Concluons cette partie par une série d'exemples.

EXEMPLE 1.2 (La sphère). Pour tout $n \geq 1$, la sphère S^n est un rétract fort par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, comme on le voit en considérant $F(s, x) = \frac{x}{\|x\|^s}$.

EXEMPLE 1.3 (La bande de Möbius). La bande de Möbius B est donnée le sous-ensemble des points $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ de la forme $\{(t, z), z \in \mathbb{R}_+ e^{2i\pi t}\}$. L'application $F(s, (t, z)) = (t, (1 - s)z)$ définit un rétract fort par déformation de la bande sur le cercle.

Rappelons la notion de *somme pointée* d'espaces topologiques. Soit (X_0, x_0) et (X_1, x_1) deux espaces topologiques pointés. Leur somme pointée $(X_0, x_0) \vee (X_1, x_1)$ est définie comme l'union disjointe de X_0 et X_1 quotienté par la relation d'équivalence qui identifie les deux points x_0 et x_1 . Un voisinage ouvert du point image de $x_0 = x_1$ dans $(X_0, x_0) \vee (X_1, x_1)$ est donné par les unions $N_0 \cup N_1$ où N_0 et N_1 sont des voisinages ouverts de x_0 et x_1 respectivement.

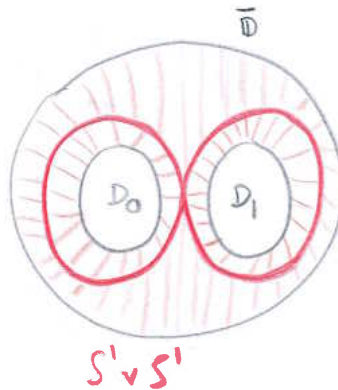
En général, le choix des points bases est important. Cependant si les groupes des homéomorphismes de X_0 et X_1 agissent transitivement sur X_0 et X_1 respectivement, alors le type d'homéomorphisme de $(X_0, x_0) \vee (X_1, x_1)$ est indépendant du choix de x_0 et x_1 . C'est en particulier le cas lorsque X_0 et X_1 sont des variétés lisses connexes. On enlèvera alors la référence au point base, et on notera uniquement $X_0 \vee X_1$.

EXEMPLE 1.4. Choisissons deux disques ouverts D_0 et D_1 disjoints relativement compacts dans le disque unité \mathbb{D} du plan complexe. Alors $\bar{\mathbb{D}} \setminus (D_0 \cup D_1)$ est un rétract par déformation de $S^1 \vee S^1$. Pour voir cela, on inscrit une figure huit dont chaque boucle contient un des deux disques : on peut alors homotoper $\bar{\mathbb{D}} \setminus (D_0 \cup D_1)$ sur cette figure en la gardant fixe.

REMARQUE 1.26 (Cylindre d'une application). Les exemples ci-dessus sont tous des cas particuliers de la construction du cylindre d'une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques. Cet espace topologique est obtenu recollant l'union disjointe de $X \times [0, 1]$ avec Y en identifiant $x \times \{0\}$ avec $f(x)$. On le note M_f .

Le cylindre M_f est toujours un rétract par déformation de Y par l'application fixant Y et envoyant $(x, t) \in X \times [0, 1]$ sur $(x, (1 - s)t)$.

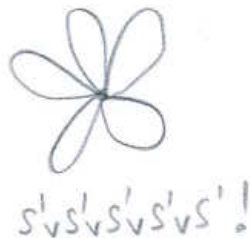
Par exemple, la bande de Möbius est obtenue en prenant $X = Y = S^1$ et $f(z) = z^2$.



DÉFINITION. Une équivalence d'homotopie entre deux espaces topologiques est une application continue $f : X \rightarrow Y$ pour laquelle il existe $g : Y \rightarrow X$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux homotopes à l'identité respectivement sur Y et X .

Tout rétract par déformation $f : X \rightarrow A$ induit une équivalence d'homotopie entre X et A . Remarquons de plus qu'une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$ induit un isomorphisme $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$.

EXEMPLE 1.5 (Bouquet de cercles). Pour tout choix de n points z_1, \dots, z_n dans le cercle S^1 non nécessairement distincts, on peut considérer la somme pointée $\bigvee_{i=1}^n (S^1, z_i)$. Tous les espaces $\bigvee_{i=1}^n (S^1, z_i)$ sont homotopiquement équivalents entre eux. En particulier, ils sont homotopiquement équivalents au bouquet de n cercles $\bigvee_{i=1}^n (S^1, 1)$. Notons qu'un tel bouquet est homéomorphe à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z^n - 1| = 1\}$.



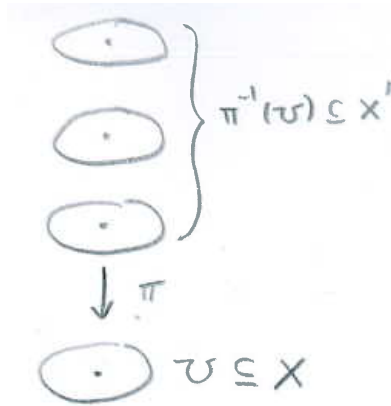
2. Revêtements

La notion de revêtements est indissociable de celle de groupe fondamental. Nous verrons qu'elle nous permettra à la fois de classifier les sous-groupes du groupe fondamental d'un espace donné, et de calculer un certain nombre de groupes fondamentaux.

2.1. Définitions et exemples.

DÉFINITION. Une application continue $\pi : X \rightarrow Y$ est un revêtement si tout point $y \in Y$ admet un voisinage ouvert U tel que $\pi^{-1}(U)$ est une union (non vide) disjointe d'ouverts $\sqcup V_\alpha$ tels que $\pi : V_\alpha \rightarrow U$ est un homéomorphisme pour tout α .

De manière équivalente, pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert U , un ensemble discret F (non vide) et un homéomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que $\text{pr}_1 \circ \varphi = \pi$ où pr_1 désigne la première projection de $U \times F$ sur U .



Généralement on appelle Y la base du revêtement, et X l'espace total. Un ouvert U de Y apparaissant dans la définition est appelé ouvert de trivialisations.

Les revêtements sont des applications d'un type très particulier.

LEMME 2.1. *Un revêtement est une application surjective ouverte. C'est de plus un homéomorphisme local, dont les fibres sont discrètes.*

DÉMONSTRATION. Si x est un point de X , il existe alors un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de $y = \pi(x)$ tel que $\pi : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme par définition. Ceci montre que π est un homéomorphisme local et est donc ouvert.

Soit U un voisinage ouvert d'un point y qui soit de trivialisations. Alors on peut écrire $\pi^{-1}(U) = \sqcup V_\alpha$. Chaque V_α est ouvert et donc $V_\alpha \cap \pi^{-1}\{y\}$ est ouvert dans la fibre de π au-dessus de y . Mais cette fibre ne contient qu'un point, car $\pi : V_\alpha \rightarrow U$ est un homéomorphisme, et donc $\pi^{-1}\{y\}$ est bien un ensemble discret. La surjectivité d'un revêtement découle aisément de la définition. \square

REMARQUE 2.2. Pour tout espace topologique X , l'inclusion d'un ouvert Ω dans X est un homéomorphisme local, à fibre discrète mais n'est un revêtement que si $\Omega = X$. Il existe des application surjectives ouvertes à fibres finies qui ne sont pas des revêtements comme le montre l'exemple 2.3 ci-dessous.

Pour tout ensemble discret F , l'application de première projection $X \times F \rightarrow X$ est un revêtement, appelé revêtement trivial. Décrivons quelques exemples non triviaux.

EXEMPLE 2.1. L'application $\pi(t) = e^{2i\pi t}$ est un revêtement de \mathbb{R} sur S^1 . En effet on peut recouvrir le cercle par les deux ouverts $S^1 \setminus \{-1\}$ et $S^1 \setminus \{1\}$; leur préimage par π sont respectivement égales à $\sqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ et $\sqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$; et la restriction de π sur tout segment $(n, n+1)$ (resp. $(n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$) est un homéomorphisme sur $S^1 \setminus \{-1\}$ (resp. sur $S^1 \setminus \{1\}$).

De même, $\pi(z) = e^{2i\pi z}$ induit un revêtement de \mathbb{C} sur \mathbb{C}^* . Pour voir cela on peut recouvrir le plan complexe par les deux ouverts $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et remarquer que par exemple $\pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \sqcup_{n \in \mathbb{Z}} \{z, n - \frac{1}{2} < \Re(z) < n + \frac{1}{2}\}$.

Enfin cette même application $\pi(z) = e^{2i\pi z}$ induit aussi un revêtement de \mathbb{H} sur \mathbb{D}^* .

EXEMPLE 2.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ non nul, l'application $z \mapsto z^n$ est un revêtement du cercle sur lui-même. Dans ce cas, la préimage de tout point est fini de cardinal $|n|$. Cette même application induit un revêtement du disque épointé sur lui-même.

Un revêtement $\pi : X \rightarrow Y$ est dit *fini* si la préimage de tout point est fini. Il est dit *connexe* si l'espace total X l'est (et donc la base aussi).

PROPOSITION 2.3. *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement fini et connexe. Alors le cardinal de toute fibre est le même.*

EXEMPLE 2.3. L'application $z \mapsto z^n$ n'est pas un revêtement du disque sur lui-même bien que la préimage de tout point soit fini et donc discrète.

DÉMONSTRATION. Soit $y \in B$, et U un ouvert de trivialisations contenant y . Alors $\pi^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts V_i tels que $\pi : V_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme. On en déduit que la fonction $f(y) := \#\pi^{-1}\{y\}$ est constante sur U . Toute fonction localement constante sur un espace connexe étant constante, le résultat s'ensuit. \square

Mentionnons quelques procédés généraux de construction de revêtements.

Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement, et Y' un sous-ensemble quelconque de Y . La restriction de f à $\pi^{-1}(Y')$ est un revêtement de base Y' . On l'appelle le *revêtement induit* par π sur Y' .

On peut généraliser cette construction de la manière suivante. Donnons-nous une application continue (quelconque) $f : Z \rightarrow Y$. On définit alors l'espace fibré $Z \times_Y X$ comme le sous-espace de $Z \times X$ constitué des paires $(z, x) \in Z \times X$ telles que $f(z) = \pi(x)$. L'application de première projection $\text{pr}_1 : Z \times_Y X \rightarrow Z$ est alors

un revêtement. En effet, pour tout $z \in Z$, on peut trouver un voisinage U de $f(z)$ tel que $\pi^{-1}(U)$ est une union disjointe de copies de U . Et on vérifie alors que $\text{pr}_1^{-1}(V)$ est une union disjointe de copies de V si $V = f^{-1}(U)$. On dit ici que $\text{pr}_1 : Z \times_Y X \rightarrow Z$ est le revêtement induit par tiré en arrière de $\pi : X \rightarrow Y$ par f .

$$\begin{array}{ccc} Z \times_Y X & \xrightarrow{\text{pr}_2} & X \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Finalement si $\pi_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ et $\pi_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ sont deux revêtements, alors $(\pi_1, \pi_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ est encore un revêtement appelé *revêtement produit*.

2.2. Revêtements et surfaces de Riemann. Notons tout d'abord que tout revêtement entre surfaces de Riemann est nécessairement holomorphe. Plus précisément, nous avons :

PROPOSITION 2.4. *Soit S une surface de Riemann, et $\pi : S' \rightarrow S$ un revêtement. Alors il existe une et une seule structure de surface de Riemann sur S' telle que π soit holomorphe.*

REMARQUE 2.5. On verra plus loin qu'il existe un revêtement de degré 2 de la sphère S^2 sur une surface $\mathbb{R}P^2$ qui n'admet pas de structure de surfaces de Riemann, voir Exemple 2.7, et §2.8.

DÉMONSTRATION. Donnons-nous un atlas holomorphe $\{(V, \varphi)\}$ sur S , et $\{U_i\}$ un recouvrement de S par des ouverts de trivialisations de π . Pour chaque i , on peut écrire $\pi^{-1}(U_i) = \sqcup_j U_{i,j}$ de telle sorte que $\pi : U_{i,j} \rightarrow U_i$ est un homéomorphisme pour tout i, j . On note $\pi_{i,j}^{-1} : U_i \rightarrow U_{i,j}$ son inverse.

Montrons que S' est séparé. Si $y \neq y' \in S'$ ne sont pas dans la même fibre, alors il existe deux ouverts U, U' disjoints contenant $\pi(y)$ et $\pi(y')$ respectivement, et $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(U')$ sont bien disjoints et contiennent y et y' . Lorsque y et y' sont des points distincts de la même fibre, on choisit un indice i tel que $\pi(y) = \pi(y') \in U_i$. Ces deux points appartiennent alors à deux ouverts $U_{i,j}, U_{i,j'}$ différents.

On définit alors un atlas holomorphe sur S' en prenant pour recouvrement les ouverts $W := U_{i,j} \cap \pi^{-1}(V)$ et en posant $\psi : W \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\varphi \circ \pi$. Si $W' = U_{i,j'} \cap \pi^{-1}(V')$ est un autre ouvert de ce type, avec $\varphi' : V' \rightarrow \mathbb{C}$ une carte, l'application de recollement $\psi_{W'} \circ \psi_W^{-1}$ est alors égale à $\varphi' \circ \pi \circ \pi_{i,j}^{-1} \circ \varphi^{-1} = \varphi' \circ \varphi^{-1}$ qui est donc bien holomorphe.

Supposons que S' soit muni d'une structure de surface de Riemann telle que π soit holomorphe. Ceci signifie que S' possède un recouvrement par des ouverts Z_l munis de cartes $h_l : Z_l \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $h_l \circ (h_{l'})^{-1}$ est holomorphe, et $\varphi \circ \pi \circ h_l^{-1}$ aussi (chacune sur leur domaine de définition). Montrer que cette structure sur S' est identique à celle que l'on vient de construire revient à démontrer que pour une carte $W := U_{i,j} \cap \pi^{-1}(V)$, $\psi = \varphi \circ \pi : W \rightarrow \mathbb{C}$ comme ci-dessus l'application $\psi \circ (h_l)^{-1}$ est holomorphe. Or celle-ci est égale à $\varphi \circ \pi \circ (h_l)^{-1}$.

Ce calcul montre en fait que la structure de surface de Riemann que l'on a construit sur S' rend aussi l'application π holomorphe. \square

REMARQUE 2.6. Soit $f : S' \rightarrow S$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann connexes. Alors f est ouverte, et les fibres de f sont discrètes, mais f n'est pas nécessairement un revêtement. Il se peut que f ne soit pas un homéomorphisme local (comme $z \mapsto z^n$ en 0); ou que f ne soit pas surjective (comme l'inclusion de tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ dans \mathbb{C}).

2.3. Revêtements et actions de groupes. On peut obtenir de nombreux exemples de revêtement en prenant des quotients d'espace par des actions adéquates de groupes.

DÉFINITION. Un groupe G agit proprement discontinûment sur un espace topologique X si pour toute paire de points $x, x' \in X$ il existe des ouverts U_x et $U_{x'}$ les contenant tels que l'ensemble des $g \in G$ vérifiant $g \cdot U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset$ est fini.

PROPOSITION 2.7. *Un groupe G agit proprement discontinûment sur un espace X localement compact si et seulement si pour tout compact K seul un nombre fini de $g \in G$ vérifie $g \cdot K \cap K \neq \emptyset$.*

Rappelons qu'une surface de Riemann est localement compacte. La Définition 3.2 d'action holomorphe proprement discontinue donnée au Chapitre précédent est donc bien compatible avec la définition ci-dessus.

DÉMONSTRATION. Dans le sens direct, on fixe un compact K et pour chaque paire $\{x, x'\} \subset K$ on choisit deux ouverts U_x et $U_{x'}$ tels que $F_{x,x'} = \{g \in G, g \cdot U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset\}$ est fini. On extrait alors un sous-recouvrement fini de $K \times K$ de la forme $U_{x_i} \times U_{x'_i}$. On conclut en remarquant que $\{g \in G, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcup_i U_{x_i} \times U_{x'_i}$.

Pour la réciproque, on choisit un voisinage (compact) U de la paire $\{x, x'\}$ tel que $\{g \in G, g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ est fini. On pose alors $U_x = U \cap V_x$ et $U_{x'} = U \cap V_{x'}$ où V_x et $V_{x'}$ sont deux ouverts disjoints contenant x et x' respectivement. \square

PROPOSITION 2.8. *Soit G un groupe agissant proprement discontinûment et sans point fixe sur un espace topologique X séparé.*

- (1) *L'espace quotient X/G muni de la topologie quotient est séparé.*
- (2) *La projection canonique $\pi : X \rightarrow X/G$ est un revêtement.*

DÉMONSTRATION. Fixons tout d'abord $x, x' \in X$ tels que $g \cdot x \neq x'$ pour tout g . On va construire deux ouverts $U \ni x$ et $V \ni x'$ tels que $g \cdot U \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G$. Comme $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ est ouvert, $\pi(U)$ est ouvert dans X/G , et contient $\pi(x)$. De même $\pi(V)$ est un ouvert dans X/G contenant $\pi(x')$. Ces deux ouverts sont disjoints car $g \cdot U \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G$ et donc X/G est séparé.

Pour construire U et V on procède comme suit. Comme l'action de G est proprement discontinue, on choisit tout d'abord U_0 et V_0 contenant x et x' respectivement, et tels que $g \cdot U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$ pour un nombre fini de possibilités, par exemple pour

$g \in \{g_1, \dots, g_n\}$. Ensuite pour chaque i , on utilise l'hypothèse que X est séparé pour trouver des ouverts U_i, V_i contenant $g_i \cdot x$ et x' respectivement et d'intersection vide. On pose alors $U := U_0 \cap_{i=1}^n g_i^{-1} \cdot U_i$, et $V := \bigcap_{i=0}^n V_i$. Si $g = g_i$ alors $g_i \cdot U \subset U_i$ qui est disjoint de V_i qui contient V , et donc $g \cdot U \cap V = \emptyset$ dans ce cas. Si $g \notin \{g_1, \dots, g_n\}$, alors $g \cdot U \cap V \subset g \cdot U_0 \cap V_0$ qui est vide.

Fixons $x \in X$. Nous allons construire un voisinage U_x de x tel que $g \cdot U_x \cap U_x = \emptyset$ pour tout $g \neq e$. On remarque que $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = \sqcup_{g \in G} g \cdot U_x$ et que la restriction de la projection $g \cdot U_x \rightarrow \pi(U_x)$ est un homéomorphisme (car elle est ouverte), ce qui montre bien que π est un revêtement.

Pour construire U_x , on procède comme suit. Par définition, il existe un ouvert V_x contenant x tel que $g \cdot V_x \cap V_x \neq \emptyset$ uniquement pour un nombre fini d'éléments $\{e, g_1, \dots, g_m\}$ de G . Comme l'action de G est sans point fixe on a $x_i := g_i \cdot x \neq x$, et on peut trouver des ouverts V_i contenant x et U_i contenant $g_i \cdot x$ tel que $U_i \cap V_i = \emptyset$.

On pose $U_x := V_x \cap_{i=1}^n g_i^{-1}(U_i) \cap_{i=1}^n V_i$. Supposons que $g \cdot U_x \cap U_x$ soit non vide pour $g \neq e$. Comme $U_x \supset V_x$, on obtient que $g \cdot V_x \cap V_x \neq \emptyset$, et donc $g = g_i$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$. On a alors $g_i \cdot U_x \subset g_i(g_i^{-1}(U_i)) = U_i$. Comme U_i est disjoint de V_i qui contient V_x , on obtient une contradiction. \square

DÉFINITION. Un isomorphisme entre deux revêtements $\pi_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ et $\pi_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ est la donnée de deux homéomorphismes $f : X_1 \rightarrow X_2$ et $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ tels que $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$.

DÉFINITION. Un revêtement $X \rightarrow Y$ sera dit *galoisien* si il est isomorphe à un revêtement donné par l'action proprement discontinue d'un groupe G sur X sans point fixe.

EXEMPLE 2.4. L'action de \mathbb{Z} sur la droite réelle par translation donnée donc par $1 \cdot x := x + 1$ définit un revêtement galoisien $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ isomorphe au revêtement de la droite sur le cercle. L'isomorphisme est donné par l'application identité sur \mathbb{R} .

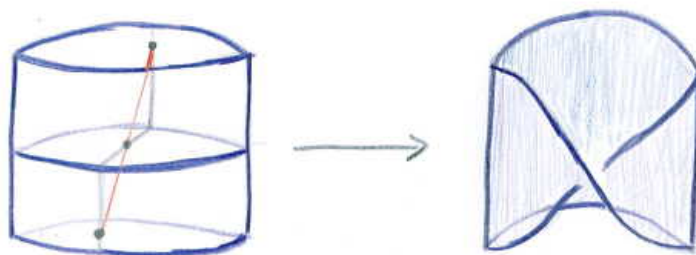
EXEMPLE 2.5. Etant donné $\omega \in \mathbb{H}$ l'action de \mathbb{Z}^2 sur le plan complexe par translation $(n, m) \cdot z = z + n + m\omega$ induit un revêtement galoisien de \mathbb{C} sur \mathbb{C}/Λ . Tous ces revêtements sont isomorphes en tant que revêtement bien que les surfaces de Riemann \mathbb{C}/Λ ne soient pas nécessairement biholomorphes entre elles.

EXEMPLE 2.6. L'application $z \mapsto z^n$ est un revêtement galoisien de \mathbb{D}^* sur lui-même, isomorphe au quotient du disque épointé par l'action de \mathbb{Z}/n donné par les rotations d'angle $2\pi \frac{\mathbb{Z}}{n}$.

EXEMPLE 2.7. Fixons $n \geq 2$, et considérons l'application antipodale $\sigma(x) = -x$ sur la sphère unité S^n et \mathbb{R}^{n+1} . Comme σ est une involution, on obtient une action de $\mathbb{Z}/2$ sur S^n sans point fixe. L'espace quotient s'identifie naturellement à l'ensemble des droites de \mathbb{R}^{n+1} : c'est l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$. On a donc un revêtement galoisien d'ordre 2 de S^n sur $\mathbb{R}P^n$.

EXEMPLE 2.8. L'application $(z, t) \mapsto (-z, -t)$ sur le cylindre $S^1 \times [-1, 1]$ induit un revêtement galoisien d'ordre 2. L'espace quotient M s'identifie ici à la bande de

Möbius. Pour voir celà, on remarque que le cylindre est homéomorphe au quotient de $[0, 1] \times [-1, 1]$ par la relation $(x, t) \simeq (x + 1, t)$; et que M s'identifie alors au quotient de $[0, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$ par la relation $(x, t) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -t)$.



REMARQUE 2.9. Tout revêtement $f : X \rightarrow Y$ d'ordre 2 est galoisien, l'involution étant donnée par l'application qui à $x \in X$ associe l'unique point de $\pi^{-1}(\pi(x))$ distinct de x . Il existe des revêtements non galoisiens finis de degré 3 (voir [Ha, Exemple 3 p.58]).

2.4. Relèvement des applications. Nous délaissions maintenant les exemples et attaquons la théorie générale des revêtements. Une des propriétés fondamentales des revêtements est la propriété de relèvement des homotopies et des applications que nous résumons en deux énoncés.

Rappelons que la notation $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ indique que f est une application de X dans Y qui envoie x sur y .

PROPOSITION 2.10 (Relèvement des homotopies). *Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement, $f : [0, 1] \times Z \rightarrow Y$ une homotopie (continue) déformant l'application $f_0(z) = f(0, z)$ en $f_1(z) = f(1, z)$, et $F_0 : Z \rightarrow X$ une application continue telle que $\pi \circ F_0 = f_0$.*

Alors il existe une unique homotopie $F : [0, 1] \times Z \rightarrow X$ telle que $\pi \circ F = f$, et $F(0, \cdot) = F_0$.

DÉMONSTRATION. Nous avons démontré ce résultat dans le cas du revêtement $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ au Lemme 1.12. La démonstration s'adapte immédiatement au cas d'un revêtement quelconque. \square

THÉORÈME 2.11 (Relèvement des applications). *Soit $\pi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un revêtement, et $f : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une application continue quelconque. Supposons que Z soit connexe par arcs, et que chaque point de Z admette un voisinage connexe par arcs. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *L'application f se relève, i.e. il existe une application $g : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ telle que $\pi \circ g = f$.*
- (2) *L'image de $\pi_1(Z, z_0)$ par f_* est incluse dans l'image de $\pi_1(X, x_0)$ par π_* , i.e. $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_*(\pi_1(X, x_0))$.*

De plus, lorsque ces conditions sont satisfaites, le relèvement est unique.

REMARQUE 2.12. Un espace topologique vérifiant la condition que chaque point admette un voisinage connexe par arcs est dit localement connexe par arcs.

DÉMONSTRATION. Le fait que (1) \Rightarrow (2) résulte de la functorialité. Si $\pi \circ g = f$, alors

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) = (\pi \circ g)_*\pi_1(Z, z_0) = \pi_*(g_*\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_*(\pi_1(X, x_0)) .$$

Pour la réciproque (2) \Rightarrow (1), on procède comme suit. On prend $z \in Z$ et γ un chemin de z_0 à z . Comme Z est connexe par arcs, un tel chemin existe toujours. On relève $f \circ \gamma$ par la proposition précédente en un chemin $\Gamma : [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ tel que $\Gamma(0) = x_0$ et $\pi \circ \Gamma = f \circ \gamma$, et on définit $g(z) = \Gamma(1)$.

Le point est de vérifier que $g(z)$ ne dépend alors pas du choix de chemin γ reliant z_0 à z . Soit donc γ' un tel autre chemin, et $\Gamma' : [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ le relevé de $f \circ \gamma'$.

Regardons le lacet composé $l := \bar{\gamma} \cdot \gamma'$. La classe du lacet $f \circ l$ dans $\pi_1(Y, y_0)$ appartient à $f_*(\pi_1(Z, z_0))$, et donc à $\pi_*(\pi_1(X, x_0))$ par hypothèse. Il existe donc une homotopie H déformant un lacet de la forme $\pi \circ k$ à $f \circ l$.

Comme $H(0, \cdot)$ se relève en le chemin k , la Proposition précédente s'applique, et le relèvement de cette homotopie à (X, x_0) définit une nouvelle homotopie \tilde{H} déformant k en un chemin L . On observe maintenant que $s \mapsto \tilde{H}(s, 1)$ est une application continue à valeurs dans la fibre de y_0 qui est discrète, et est donc constante. On en conclut que le chemin L est en réalité un lacet basé en x_0 qui relève donc $f \circ (\bar{\gamma} \cdot \gamma')$. Le chemin $t \mapsto L(1 - \frac{t}{2})$ part de x_0 et son image par π est exactement $f \circ \gamma$: il doit donc coïncider avec Γ . De même $t \mapsto L(\frac{t}{2})$ coïncide avec Γ' . On en conclut que $\Gamma(1) = L(\frac{1}{2}) = \Gamma'(1)$.

L'unicité du relèvement est claire. En effet si g est un relèvement de f , et γ un chemin reliant z_0 à z , alors $g \circ \gamma$ est le relèvement de $f \circ \gamma$ partant de x_0 , et $g \circ \gamma(1) = g(z)$.

Montrons enfin la continuité du relèvement. Il suffit de le vérifier localement en un point z_1 . On fixe un ouvert U de trivialisatation contenant $f(z_1)$, et on fixe V contenant $g(z_1)$ tel que $\pi : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Notons $\pi_V^{-1} : U \rightarrow U$ son inverse.

Comme Z est localement connexe par arcs, il existe un voisinage W de z_1 inclus dans $f^{-1}(U)$. On va montrer que $g := \pi_V^{-1} \circ f$ sur W . Pour cela fixons γ_1 un chemin reliant z_0 à z_1 , et γ un chemin reliant z_1 à un point donné $z \in W$. Soit Γ_1 le relevé de $f \circ \gamma_1$. Le chemin $\gamma \cdot \gamma_1$ relie alors z_0 à z et le chemin $l := (\pi_V^{-1} \circ f) \circ (\gamma) \cdot \Gamma_1$ est bien le relevé de $f \circ (\gamma \cdot \gamma_1)$. On a donc bien $g(z) = l(1) = \pi_V^{-1} \circ f(z)$. \square

EXEMPLE 2.9. Fixons deux réseaux Λ et Λ' de \mathbb{C} , et notons $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ les revêtements induits (voir Exemple 2.5). Donnons-nous une application holomorphe $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$. Alors il existe une application holomorphe $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f \circ \pi = \pi' \circ F$. En effet, la condition (2) du théorème précédent est trivialement vérifiée car \mathbb{C} est simplement connexe.

On peut même démontrer que F est une application affine.

2.5. Revêtement universel. Le but de cette section est de montrer l'existence d'un revêtement simplement connexe pour tout espace topologique X assez raisonnable.

Supposons tout d'abord qu'il existe un tel revêtement $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$: comme \tilde{X} est connexe par arcs, il est nécessaire que X le soit aussi. Soit $x \in X$ et U un voisinage de x donné par la définition de revêtement. On peut alors trouver $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ tel que $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ soit un homéomorphisme. Prenons γ un lacet dans U basé en x , et relevons le à \tilde{U} . Comme \tilde{X} est simplement connexe, nous pouvons trouver une homotopie H déformant γ au lacet constant, et donc γ est homotope par $p \circ H$ dans X au lacet constant. Il s'ensuit que tout point x admet un voisinage U tel que l'inclusion $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ soit d'image triviale.

Cela motive la définition suivante.

DÉFINITION. Un espace topologique X est dit semi-localement simplement connexe si tout point x admet un voisinage U tel que l'inclusion $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ soit d'image triviale.

Cette terminologie est quelque peu barbare. Notons cependant que de nombreux espaces topologiques la vérifient comme tous les espaces admettant un recouvrement par des ouverts simplement connexes. Les surfaces de Riemann (connexes) et même plus généralement toutes les variétés (topologiques) connexes sont semi-localement simplement connexes.

THÉORÈME 2.13. *Tout espace X connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe admet un revêtement simplement connexe.*

Avant de démontrer ce résultat d'existence, donnons une caractérisation très importante de ces revêtements.

THÉORÈME 2.14. *Soit X un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe et $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement simplement connexe.*

Pour tout revêtement connexe $\pi : X' \rightarrow X$ il existe un revêtement $\varphi : \tilde{X} \rightarrow X'$ telle que $\pi = \pi' \circ \varphi$. En particulier, deux revêtements simplement connexes sont nécessairement isomorphes.

REMARQUE 2.15. Un revêtement ayant une telle propriété est qualifié de revêtement universel. Lorsque les espaces sont remplacés par des espaces pointés, remarquons que l'application φ est alors unique.

Il est naturel d'introduire la notion suivante de morphisme.

DÉFINITION. Soient $\pi : X \rightarrow B$ et $\pi' : X' \rightarrow B$ deux revêtements de même base. Un morphisme de revêtement (au dessus de B) est une application continue $\varphi : X \rightarrow X'$ telle que $\pi' \circ \varphi = \pi$.

REMARQUE 2.16. Dans l'énoncé du Théorème 2.14, l'application φ est un morphisme de revêtement.

LEMME 2.17. *Si B est localement connexe et π' est connexe, tout morphisme d'un revêtement π vers π' est lui-même un revêtement.*

DÉMONSTRATION. Prenons $x' \in X'$ et fixons U un ouvert connexe contenant $\pi'(x')$ qui est de trivialisations à la fois pour π et pour π' . On a donc $(\pi')^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha} V'_{\alpha}$ et $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\beta} W_{\beta}$ de telle sorte que $\pi' : V'_{\alpha} \rightarrow U$ et $\pi : W_{\beta} \rightarrow U$ sont tous des homéomorphismes. Comme $\varphi(W_{\beta})$ est connexe, et que son image par π' est U , c'est donc une composante connexe de $(\pi')^{-1}(U)$, et est donc égal à l'un des ouverts V'_{α} . L'application $\varphi : W_{\beta} \rightarrow V'_{\alpha}$ s'identifie alors à la composition $(\pi')^{-1}_{\alpha} \circ \pi$, et est donc bien un homéomorphisme. On en déduit que $\varphi^{-1}(V'_{\alpha})$ est une union disjointe de W_{β} .

Pour conclure il faut montrer que φ est surjective. On vient de montrer que $\varphi(X')$ est une union d'ouverts du type V'_{α} et est donc ouverte. Son complémentaire est aussi une union d'ouverts du même type et donc $\varphi(X')$ est fermé. La connexité de X' implique $\varphi(X) = X'$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.14. L'existence de φ est une conséquence directe du Théorème 2.11 de relèvement des applications. En effet, les hypothèses sur X et le fait que le groupe fondamental de \tilde{X} soit trivial permet d'appliquer ce résultat.

Le fait que φ est un revêtement résulte du lemme précédent.

Enfin si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ et $\hat{\pi} : \hat{X} \rightarrow X$ sont deux revêtements simplement connexes de X , il existe un revêtement $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ tel que $\pi = \hat{\pi} \circ \varphi$. Comme les deux espaces sont simplement connexes, on peut relever $\text{id} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ à travers φ . On en déduit l'existence d'une application continue ψ , telle que $\varphi \circ \psi = \text{id}$. Les deux revêtements sont donc bien isomorphes. \square

EXEMPLE 2.10. Les revêtements des Exemples 2.4, 2.5, et 2.7 sont des revêtements universels.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.13. On suit très précisément la preuve donnée dans [Ha, p.64-65]. On note x_0 le point base dans X .

0. On définit \tilde{X} comme l'ensemble de tous les chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$ modulo homotopie, c'est-à-dire que l'on identifie deux chemins γ et γ' si et seulement il existe une homotopie H à extrémités fixées (x_0 et $\gamma(1)$) déformant γ en γ' . Étant donné un chemin γ , on notera $[\gamma]$ sa classe dans \tilde{X} . On peut poser $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$ ce qui définit une application de \tilde{X} sur X . On va montrer que π est un revêtement. Remarquons tout de suite que π est surjective car \tilde{X} est connexe par arcs.

1. On va définir une topologie sur \tilde{X} . Introduisons l'ensemble \mathfrak{U} constitué des ouverts connexes par arcs V de X tels que le morphisme $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ soit trivial pour un (ou n'importe quel) point $x \in V$.

Comme X est localement connexe par arcs, tout voisinage V d'un point x contient un ouvert $U \ni x$ connexe par arcs. Par semi-locale simple-connexité, on

peut aussi trouver un ouvert $U' \ni x$ tel que le morphisme $\pi_1(U', x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est d'image triviale. En composant ce morphisme avec celui induit par l'inclusion $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(U', x)$, on en déduit par functorialité que l'image de $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est aussi triviale, et donc que $U \in \mathfrak{U}$. En particulier \mathfrak{U} forme une base pour la topologie de X .

Étant donné un ouvert $U \in \mathfrak{U}$ et un lacet γ partant de x_0 et aboutissant en un point de U on définit maintenant

$$(2.1) \quad U_{[\gamma]} := \{[\theta \cdot \gamma], \theta \text{ est un chemin dans } U, \text{ et } \theta(0) = \gamma(1)\} .$$

Remarquons que $U_{[\gamma]}$ ne dépend effectivement que de la classe d'homotopie du chemin γ . Observons ensuite que l'application $\pi : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ est bijective. En effet, elle est surjective car U est connexe par arcs ; et injective car deux chemins θ et θ' dans U ayant les mêmes extrémités sont homotopes (dans X !) car l'image de $\pi_1(U)$ dans $\pi_1(X)$ est triviale (la démonstration est analogue à celle de la Proposition 1.9).

LEMME 2.18. *Prenons $U \in \mathfrak{U}$, et γ un chemin partant de x_0 et aboutissant en un point de U . Pour tout chemin γ' partant de x_0 tel que $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$, on a alors $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$.*

DÉMONSTRATION. L'hypothèse sur γ' signifie que ce chemin aboutit dans U et est homotope à un chemin de la forme $\eta \cdot \gamma$ avec $\eta([0, 1]) \subset U$. Un chemin de $U_{[\gamma']}$ étant de la forme $\theta \cdot \eta \cdot \gamma$ avec $\theta([0, 1]) \subset U$, il est clair que $U_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$. Réciproquement, un chemin de $U_{[\gamma]}$ est de la forme $\theta \cdot \gamma$ avec $\theta([0, 1]) \subset U$, et donc homotope à $\theta \cdot \bar{\eta} \cdot \eta \cdot \gamma \in U_{[\gamma']}$. \square

On définit maintenant une topologie sur \tilde{X} en prenant $U_{[\gamma]}$ comme base d'ouverts. En d'autres termes, un sous-ensemble $V \subset \tilde{X}$ est ouvert si et seulement si c'est une union d'ensembles de la forme $U_{[\gamma]}$.

Pour que les $U_{[\gamma]}$ forment une base d'une topologie sur \tilde{X} , il nous faut cependant vérifier que tout point $[\eta]$ d'une intersection $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ appartient à un ensemble de la forme $U_{[\gamma']}$ inclus dans $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$. Pour cela, on fixe $V \in \mathfrak{U}$ inclus dans $U \cap U'$ et contenant $\eta(1)$. Le lemme précédent implique que $U_{[\eta]} = U_{[\gamma]}$, et $U'_{[\eta]} = U'_{[\gamma']}$, et donc $V_{[\eta]} \subset U_{[\eta]} \cap U'_{[\eta]} = U_{[\gamma]} \cap U'_{[\gamma']}$ ce qu'il fallait démontrer.

2. Montrons que la bijection $\pi : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ est un homéomorphisme. En particulier $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est continue.

En effet, π induit une bijection entre les ouverts du type $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$ et ceux $V \in \mathfrak{U}$ contenus dans U . D'un coté, on a $V = \pi(V_{[\gamma']}) \subset \pi(U_{[\gamma]}) = U$. Et de l'autre $\pi^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]} = V_{[\gamma']}$ où γ' est un chemin aboutissant en un point de V , car $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$ par le Lemme 2.18, et $\pi(V_{[\gamma']}) = V$.

3. L'application $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement car pour tout $U \in \mathfrak{U}$, la pré-image $\pi^{-1}(U)$ est l'union disjointe des $U_{[\gamma]}$ où γ parcourt l'ensemble de tous les lacets partant de x_0 et aboutissant en un point de U et que $\pi : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ est un homéomorphisme

par le point précédent. En effet, si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ est non vide, alors $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$ par le lemme ci-dessus.

4. Enfin montrons que \tilde{X} est simplement connexe.

Prenons $[\gamma] \in \tilde{X}$, et posons $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. L'application $[0, 1] \ni s \mapsto [\gamma_s]$ définit un chemin dans \tilde{X} partant du lacet constant et aboutissant en $[\gamma]$, et donc \tilde{X} est connexe par arcs.

Notons \tilde{x}_0 la classe du lacet constant égal à x_0 , et prenons un lacet $\tilde{\gamma}$ dans \tilde{X} d'extrémités \tilde{x}_0 . Sa projection $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$ définit un lacet basé en x_0 . Le lacet $\bar{\gamma}(t) := [\gamma(t \cdot)]$ est alors un chemin qui relève γ à \tilde{X} , et qui part de \tilde{x}_0 . Par unicité du relèvement, nous avons donc $\tilde{\gamma}(t) = \bar{\gamma}(t)$ pour tout t .

On en déduit que $[\gamma] = \bar{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$, et donc qu'il existe une homotopie H dans X déformant γ en le lacet constant. On relève à présent cette homotopie, et on obtient alors une homotopie \tilde{H} . Comme H est à extrémités fixées x_0 , les extrémités de \tilde{H} sont dans la fibre $\pi^{-1}(x_0)$. Cet ensemble étant discret, on en conclut que \tilde{H} est aussi à extrémités fixées, et déforme $\tilde{\gamma}$ en le lacet constant. \square

2.6. Classification des revêtements : correspondance de Galois. L'existence d'un revêtement universel nous permet de classer tous les revêtements d'un espace donné en termes de sous-groupes de son groupe fondamental. Notre but est maintenant d'expliquer et de rendre précis l'énoncé suivant.

CORRESPONDANCE DE GALOIS 1. *Soit (X, x) un espace pointé connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Il existe une correspondance bi-univoque naturelle entre :*

- l'ensemble des revêtements connexes $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$ modulo isomorphisme ;
- et l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X, x)$.

La correspondance est définie en associant au revêtement $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$ le sous-groupe $H(\pi) := \pi_*(\pi_1(X', x')) \subset \pi_1(X, x)$.

EXEMPLE 2.11. Lorsque π est un revêtement universel, on a $H(\pi) = \{e\}$, alors que $H(\pi) = \pi_1(X, x)$ lorsque π est un homéomorphisme.

Vérifions tout d'abord que deux revêtements isomorphes $p_0 : (X_0, x_0) \rightarrow (X, x)$ et $p_1 : (X_1, x_1) \rightarrow (X, x)$ définissent le même groupe. On fixe donc un isomorphisme de revêtements $\varphi : (X_0, x_0) \rightarrow (X_1, x_1)$. Notons que par définition φ envoie x_0 sur x_1 , et donc $\varphi_* : \pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X_1, x_1)$ est un isomorphisme. On a donc $H(p_1) = (p_1)_*(\pi_1(X_1, x_1)) = (p_0)_*(\varphi_*(\pi_1(X_0, x_0))) = (p_0)_*(\pi_1(X_0, x_0)) = H(p_0)$.

Supposons maintenant que nous ayons deux revêtements connexes $\pi' : (X', x') \rightarrow (X, x)$ et $\pi'' : (X'', x'') \rightarrow (X, x)$ tels que $H(\pi') = H(\pi'')$. Montrons que ces deux revêtements sont isomorphes. Pour cela on applique le Théorème 2.11 de relèvement. Comme $(\pi')_*\pi_1(X', x') \subset (\pi'')_*\pi_1(X'', x'')$ il existe une application φ envoyant x' sur x'' et telle que $\pi'' \circ \varphi = \pi'$. De même il existe une application $\psi : (X'', x'') \rightarrow (X', x')$ telle que $\pi' \circ \psi = \pi''$. Leur composition $\psi \circ \varphi : (X', x') \rightarrow (X', x')$ est un

endomorphisme de revêtement qui fixe x' . Notons que cette application relève π à travers ce même revêtement : par unicité du relèvement, on en déduit que $\psi \circ \varphi = \text{id}$. En particulier, φ est un isomorphisme de revêtement.

Nous allons à présent montrer que l'association $\pi \mapsto H(\pi)$ est surjective sur l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X, x)$. Soit donc H un tel sous-groupe. On cherche à construire un revêtement $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$ tel que $\pi_*(\pi_1(X', x')) = H$. La construction part de celle de revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ donnée à la Section 2.5. Rappelons que \tilde{X} peut être construite comme l'ensemble des chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tels que $\gamma(0) = x$ modulo homotopie (à extrémités fixées). La projection $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow X$ est donnée par $\tilde{\pi}[\gamma] := \gamma(1)$.

Notons X_H le quotient de \tilde{X} par la relation d'équivalence identifiant γ et γ' lorsque $\bar{\gamma} \cdot \gamma'$ est un lacet pointé en x dont la classe est dans H . Comme H est un sous-groupe, cette relation est bien une relation d'équivalence. On munit X_H de la topologie quotient. On va montrer que la projection $\tilde{X} \rightarrow X_H$ est un revêtement.

Remarquons que H agit sur \tilde{X} par composition à droite des chemins. Un lacet θ dont la classe est dans H agit sur un chemin γ déterminant un point de \tilde{X} et l'envoie sur le chemin $\gamma \cdot \theta$. Puis on note que par définition X_H est le quotient de \tilde{X} par cette action de H .

Rappelons que tout ouvert $U \ni a$ connexe par arcs et tel que $\pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ est d'image triviale, est un ouvert de trivialisatation, et que $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ est constitué des ouverts $U_{[\gamma]}$ où γ parcourt l'ensemble des chemins partant de x et aboutissant en un point de U (nous renvoyons à (2.1) pour la définition de ces ouverts).

Il est clair que l'action de H envoie un ouvert $U_{[\gamma]}$ bijectivement sur un ouvert de la même forme $U_{[\gamma']}$ avec $\gamma' = \gamma \cdot \theta$ pour un $[\theta] \in H$. On choisit donc une famille γ_i de chemins partant de x et aboutissant au même point dans U , chacun représentant une et une seule classe d'équivalence de points dans X_H . La restriction de la projection $\tilde{X} \rightarrow X_H$ sur $\sqcup U_{[\gamma_i]}$ est donc un homéomorphisme. Si on note la projection canonique $\pi_H : X_H \rightarrow X$, alors $\pi_H^{-1}(U)$ est homéomorphe à $\sqcup U_{[\gamma_i]}$ ce qui montre bien que π_H est un revêtement.

Soit $x_H \in H$ (resp. $\tilde{x} \in \tilde{X}$) le point de la fibre au dessus de x correspondant au lacet constant. Si γ est un lacet de X_H basé en x_H , alors $\pi_H \circ \gamma$ est un lacet de X et son relevé à \tilde{X} part de \tilde{x} et aboutit en un point \bar{x} qui est équivalent à \tilde{x} modulo l'action de H . En d'autres termes on a $[\pi_H \circ \gamma] \in H$. Réciproquement, si γ est un lacet de (X, x) dont la classe est dans H , son relevé à \tilde{X} aboutit en un point \bar{x} qui est équivalent à \tilde{x} modulo l'action de H , et donc son image dans X_H est bien un lacet. Cet argument montre que l'on a bien $(\pi_H)_*\pi_1(X_H, x_H) = H$, ce qui conclut la démonstration.

REMARQUE 2.19. La correspondance ci-dessus est en réalité plus précise : en effet les morphismes entre revêtements se traduisent par des morphismes entre groupes associés ; et réciproquement.

Il existe aussi une correspondance de Galois lorsque l'on oublie les points bases. C'est ce que nous allons maintenant expliquer. Fixons un revêtement $\pi : X' \rightarrow X$, un point $x \in X$ et des points $x'_0, x'_1 \in \pi^{-1}\{x\}$. Choisissons de plus un chemin h' d'extrémités x'_0 et x'_1 . Rappelons que l'application $\gamma \mapsto \bar{h}' \cdot \gamma \cdot h'$ induit un isomorphisme de $\pi_1(X', x'_0)$ sur $\pi_1(X', x'_1)$ (voir Proposition 1.7). Notons $h = \pi \circ h'$ et observons que ce chemin est en réalité un lacet. Il s'ensuit que $\pi_*(\pi_1(X', x'_1)) = \{[\bar{h} \cdot (\pi \circ \gamma) \cdot h]\} = [h]^{-1} \pi_*(\pi_1(X', x'_0)) [h]$, et par suite la classe de conjugaison du sous-groupe $\pi_*(\pi_1(X', x'))$ de $\pi_1(X, x)$ ne dépend pas du choix de points $x' \in \pi^{-1}\{x\}$.

Cette remarque donne la

CORRESPONDANCE DE GALOIS 2. *Soit (X, x) un espace pointé connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Il existe une correspondance bi-univoque naturelle entre :*

- l'ensemble des revêtements connexes $\pi : X' \rightarrow X$ modulo isomorphisme ;
- et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(X, x)$.

REMARQUE 2.20. La correspondance de Galois suggère une définition d'espace simplement connexe *généralisée* : X est dit simplement connexe si tout revêtement $X' \rightarrow X$ est trivial (ceci implique que X est connexe). On vérifie que tout espace simplement connexe (au sens de la page 49) est simplement connexe en ce sens généralisé.

Si X est connexe et localement simplement connexe, on peut alors démontrer qu'il existe un revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ simplement connexe généralisé (et donc universel). La construction est de nature purement algébrique : on considère "l'ensemble" de tous les revêtements $\pi_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ et on définit \tilde{X} comme la limite projective $\varprojlim_\alpha X_\alpha$. Concrètement, un point de \tilde{X} est la donnée d'un point dans chaque X_α , ces données étant soumises à des conditions de compatibilité naturelles. La mise au point de cette construction est en réalité délicate, "l'ensemble de tous les revêtements" d'un espace donné n'existant pas. Nous renvoyons à [DD, §4.4] pour les détails.

2.7. Revêtements galoisiens. L'ensemble de tous les automorphismes de revêtement d'un revêtement π donné forme un groupe pour la composition : on l'appelle le *groupe de revêtement* de π , et on le note généralement $\text{Aut}(\pi)$. Ce groupe doit être pensé comme le groupe des symétries de π et en ce sens joue un rôle analogue au groupe de Galois dans la théorie d'extension des corps.

Rappelons la notion de revêtement galoisien introduit à la Section 2.3. Comme en théorie des corps, un revêtement galoisien est caractérisé en terme de la normalité d'un certain sous-groupe.

THÉORÈME 2.21. *Soit $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$ un revêtement connexe d'un espace X connexe par arcs, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) Le groupe $\text{Aut}(\pi)$ agit transitivement sur la fibre $\pi^{-1}\{x\}$.

(2) Le groupe $\pi_*(\pi_1(X', x'))$ est un sous-groupe distingué³ de $\pi_1(X, x)$.

(3) Le revêtement est galoisien.

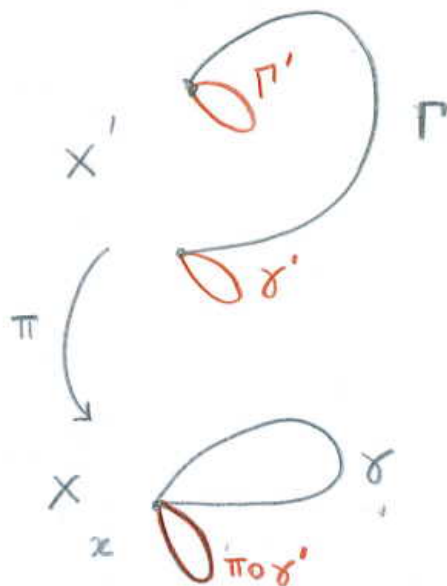
REMARQUE 2.22. Dans la littérature, les revêtements galoisiens sont aussi appelés revêtements normaux, ou réguliers.

REMARQUE 2.23. Tout revêtement simplement connexe est galoisien comme le montre la condition 2).

DÉMONSTRATION. On note $H := \pi_*(\pi_1(X', x'))$.

(3) \Rightarrow (1) Supposons que G soit un groupe agissant proprement discontinûment et sans point fixe sur X' , et que $X = X'/G$. La fibre au dessus de x est alors en bijection avec l'orbite de x' sous l'action de G . Comme G agit par automorphismes de revêtements sur X' , la propriété (1) est vérifiée.

(1) \Rightarrow (2) Soit $[\gamma]$ un élément quelconque de $\pi_1(X, x)$. On veut démontrer que $[\gamma]H = H[\gamma]$. Soit donc γ' un lacet de X' basé en x' . Notons Γ le relèvement de γ partant de x' et $x'' = \Gamma(1)$; puis Γ' le relèvement de $\pi \circ \gamma'$ partant de x'' . Par hypothèse il existe un automorphisme de revêtement φ qui envoie x' sur x'' et donc $\varphi \circ \gamma' = \Gamma'$ par unicité du relèvement. On en déduit que Γ' est un lacet qui aboutit en x'' , et donc $\bar{\Gamma} \cdot \Gamma' \cdot \Gamma$ est un lacet de X' basé en x' . Il s'ensuit $[\bar{\gamma}] \cdot [\pi \circ \gamma'] \cdot [\gamma] \in H$, ce qu'il fallait démontrer.



(2) \Rightarrow (3) On commence par remarquer le fait suivant

3. on dit aussi *normal*

LEMME 2.24. *Soit $\pi : X' \rightarrow X$ un revêtement connexe. Alors son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\pi)$ agit proprement discontinûment sur X' et sans point fixe.*

DÉMONSTRATION. Soit g un automorphisme de revêtement fixant un point $x' \in X'$. On va montrer que $g = \text{id}$. Par connexité il suffit de voir que l'ensemble des points fixes est ouvert, par exemple au voisinage de x' . On fixe un ouvert de trivialisations U contenant $\pi(x')$, on écrit $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha \in F} U_\alpha$, et on note $\pi_\alpha^{-1} : U \rightarrow U_\alpha$ est l'inverse de π à valeurs dans U_α . La restriction de g à U_α est toujours de la forme $\pi_\beta^{-1} \circ \pi$. Si U_α contient x' , et $g(x')$ il s'ensuit $\alpha = \beta$ et donc $g = \text{id}$ sur U_α .

La condition (*) se déduit de l'argument suivant. Si $x = \pi(x')$ est inclus dans un ouvert de trivialisations U et que $\pi^{-1}(U) = \sqcup_\alpha U_\alpha$, on définit U' comme l'unique U_α contenant x' . Si g est un élément du groupe d'automorphismes de revêtement et que $g(U') \cap U'$ est non vide, alors g est l'identité sur U' car coïncide avec la composition $\pi_\alpha^{-1} \circ \pi$. Par le point précédent $g = \text{id}$. \square

On va tout d'abord démontrer que le revêtement universel $\tilde{X} \rightarrow X$ est galoisien. Pour cela, on rappelle que \tilde{X} est l'espace des chemins partant de x modulo homotopie, et que $\pi_1(X, x)$ agit naturellement sur le revêtement universel \tilde{X} de X par composition à droite des chemins (voir page 73). Par le lemme précédent, cette action est proprement discontinue et sans point fixe. Le quotient $\tilde{X}/\pi_1(X, x)$ est bien l'espace X car deux chemins γ et γ' sont dans la même orbite sous l'action du groupe fondamental si et seulement si $\gamma = \theta \cdot \gamma'$ avec θ un lacet de X basé en x , et que cette dernière condition est équivalente à $\gamma(1) = \gamma'(1)$.

Soit maintenant $(X', x') \rightarrow (X, x)$ un revêtement pour lequel le groupe H est distingué dans $\pi_1(X, x)$. La correspondance de Galois montre que ce revêtement est isomorphe à celui donné par $X_H \rightarrow X$ où X_H est le quotient de \tilde{X} par l'action de H . Comme H est distingué dans $\pi_1(X, x)$, on en déduit que le groupe quotient $G := \pi_1(X, x)/H$ agit naturellement sur X_H par automorphisme de revêtements. Par le lemme ce groupe agit proprement discontinûment et sans point fixe. L'application $X_H \rightarrow X$ se factorise alors par $X_H \rightarrow X_H/G$ et le revêtement induit $X_H/G \rightarrow X$ est un homéomorphisme car c'est une bijection. \square

THÉORÈME 2.25. *Soit $\pi : X' \rightarrow X = X'/G$ un revêtement galoisien induit par l'action d'un groupe G sur un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.*

Alors les trois groupes G , $\text{Aut}(\pi)$, et $\pi_1(X, x)/\pi_(\pi_1(X', x'))$ sont naturellement isomorphes.*

Ce résultat ainsi que la Remarque 2.23 ci-dessus implique immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.26. *Si G est un groupe agissant proprement discontinûment et sans point fixe sur un espace (X, x) localement connexe par arcs, et simplement connexe, alors on a $\pi_1(X/G, [x]) \simeq G$.*

REMARQUE 2.27. L'existence du revêtement galoisien $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2$ et le corollaire précédent montre que le groupe fondamental des espaces projectifs est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ (pour $n \geq 2$).

DÉMONSTRATION. L'action de G est libre donc fidèle, on peut donc identifier G à un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de X' . Par construction le groupe G agit par automorphismes de revêtement, et donc est un sous-groupe de $\text{Aut}(\pi)$. Soit φ un automorphisme de revêtement. Prenons $g \in G$ tel que $g \cdot x' = \varphi(x')$. La composée $g^{-1} \cdot \varphi$ est alors un automorphisme de revêtement qui fixe x' et est donc l'identité. On a donc bien $G = \text{Aut}(\pi)$.

Notons $H := \pi_*(\pi_1(X', x'))$, et $G' := \pi_1(X, x)/\pi_*(\pi_1(X', x'))$. Par la correspondance de Galois, le revêtement $X' \rightarrow X'/G = X$ est isomorphe au revêtement $X_H \rightarrow X$, et comme H est distingué dans $\pi_1(X, x)$, le quotient G' agit sur X_H et ce par automorphismes de revêtement et transitivement sur la fibre au dessus de x . Il s'ensuit $G' = \text{Aut}(\pi)$. \square

2.8. Uniformisation des surfaces de Riemann. Les résultats précédents ont une importance toute particulière dans la théorie des surfaces de Riemann. Soit S une telle surface. Supposons-la connexe. Elle est alors connexe par arcs, et localement contractile : elle admet donc un revêtement simplement connexe $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$. Par la Proposition 2.4, \tilde{S} est muni d'une structure de surface de Riemann telle que π est holomorphe, et donc est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe ou au demi-plan de Poincaré par le Théorème d'uniformisation 1.

On va montrer que :

THÉORÈME D'UNIFORMISATION 2. *Soit S une surface de Riemann connexe. On est alors dans un des trois cas suivants :*

- (1) *S est biholomorphe à la sphère de Riemann, à \mathbb{C} , \mathbb{C}^* , ou à une courbe elliptique \mathbb{C}/Λ où Λ est un réseau de $(\mathbb{C}, +)$.*
- (2) *S est biholomorphe au quotient de \mathbb{H} par un sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant proprement discontinûment et sans point fixe sur le demi-plan de Poincaré.*

DÉMONSTRATION. Commençons par la remarque suivante.

LEMME 2.28. *Soit $\pi : S' \rightarrow S$ un revêtement holomorphe entre deux surfaces de Riemann. Alors tout automorphisme de revêtement est holomorphe.*

On fixe maintenant un revêtement simplement connexe $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$.

Le Théorème 2.25 montre que π descend en un homéomorphisme h du quotient $\tilde{S}/\text{Aut}(\pi)$ vers S , et le lemme précédent implique que $\text{Aut}(\pi)$ est un sous-groupe du groupe des biholomorphismes de \tilde{S} . On utilise maintenant le Théorème 3.3. Le groupe des revêtements agit proprement discontinûment sans point fixe sur \tilde{S} , et π est $\text{Aut}(\pi)$ -invariante donc $h : \tilde{S}/\text{Aut}(\pi) \rightarrow S$ est holomorphe. Étant de plus bijective, c'est un biholomorphisme.

On a donc montré que S était biholomorphe au quotient de \mathbb{C} , $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ou \mathbb{H} par un sous-groupe de leur groupe de biholomorphismes agissant proprement discontinûment et *sans point fixe*.

Un biholomorphisme de la sphère de Riemann est un élément de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$, et toute transformation de Möbius non triviale possède nécessairement un point fixe. Donc l'unique surface de Riemann revêtue par $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann.

Supposons que $\tilde{S} = \mathbb{C}$, et soit G un sous-groupe du groupe affine agissant sans point fixe. Alors tout élément de G est une translation, et par suite G s'identifie à un sous-groupe du groupe abélien $(\mathbb{C}, +)$. Si le rang de G est 1, alors $S \simeq \mathbb{C}/\langle z+1 \rangle \simeq \mathbb{C}^*$. Sinon \mathbb{C} est un réseau et S est une courbe elliptique. \square

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.28. Soit Φ un automorphisme de revêtement, et soit $x' \in S'$. On fixe (U, φ) une carte holomorphe contenant $x = \pi(x')$ et on réduit U de telle sorte qu'il soit aussi un ouvert de trivialisatation pour S et de plus connexe. On note V (resp. W) la composante connexe de $\pi^{-1}(U)$ contenant x' (resp. $\Phi(x')$), et π_W^{-1} l'application inverse de π envoyant U sur W . Comme π est holomorphe et univalente sur W , son inverse est aussi holomorphe (localement par le Théorème 2.4 du Chapitre A l'application est donnée dans des coordonnées adéquates par $z \mapsto z^k$ et l'injectivité de π montre que $k = 1$). Donc $\Phi = \pi_W^{-1} \circ \pi$ est bien holomorphe. \square

2.9. Correspondance de Galois des revêtements galoisiens. On peut maintenant énoncer la correspondance de Galois sous une forme plus générale.

Étant donné un revêtement $\pi : X' \rightarrow X$ on appellera revêtement associé tout revêtement $\varpi : Y \rightarrow X$ tel qu'il existe une application $f : X' \rightarrow Y$ vérifiant $\pi = \varpi \circ f$.

CORRESPONDANCE DE GALOIS 3. Soit $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$ un revêtement connexe galoisien sur un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs, et semi-localement simplement connexe.

Il y a une correspondance bi-univoque entre les revêtements associés à π et les sous-groupes de $\pi_1(X, x)/\pi_*(\pi_1(X', x'))$. Dans cette correspondance, un revêtement est galoisien si et seulement si son groupe associé est distingué.

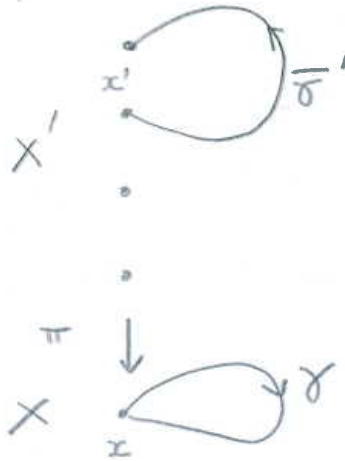
REMARQUE 2.29. Rappelons la correspondance de Galois en théorie des corps. Soit L/K une extension de corps finie galoisienne. Alors l'application associant à une sous-extension $L/F/K$ le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(L/F)$ du corps L fixant F induit une bijection entre les extensions intermédiaires $L/F/K$ et les sous-groupes de $\mathrm{Aut}(L/K)$.

En théorie des revêtements, l'extension galoisienne L/K est remplacée par un revêtement galoisien $\pi : (X', x') \rightarrow (X, x)$, et le rôle de $\mathrm{Aut}(L/K)$ est joué par $\mathrm{Aut}(\pi)$ qui est isomorphe au groupe $\pi_1(X, x)/\pi_*\pi_1(X', x)$ par le Théorème 2.25.

2.10. Action du groupe fondamental sur les fibres. Terminons ce chapitre par la description de l'action naturelle du groupe fondamental d'un espace pointé sur la fibre au-dessus de ce point marqué.

Pour cela il nous faut tout d'abord expliquer comment le groupe fondamental agit sur les fibres d'un revêtement. Fixons un espace topologique pointé X connexe par arcs et localement connexe par arcs et un revêtement $\pi : X' \rightarrow X$. Fixons $x \in X$ et $x' \in \pi^{-1}\{x\}$. Par la Proposition 2.10, et comme $[0, 1]$ est simplement connexe, tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $\gamma(0) = x$ se relève de manière unique en un chemin $\gamma' : [0, 1] \rightarrow X'$ tel que $\gamma'(0) = x'$. Si γ est un lacet, alors $\pi(\gamma'(1)) = x$.

THÉORÈME 2.30. *L'application $\gamma \mapsto \bar{\gamma}'(1)$ induit une action de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $\pi^{-1}\{x\}$ qui est transitive si X' est connexe par arcs. Le stabilisateur d'un point $x' \in \pi^{-1}\{x\}$ est le groupe $\pi_*(\pi_1(X', x'))$.*



REMARQUE 2.31. Pour que l'application $\pi_1(X, x) \times \pi^{-1}\{x\} \rightarrow \pi^{-1}\{x\}$ définisse bien une action, on est obligé de relever l'inverse de γ . En d'autres termes $\pi_1(X, x)$ agit à droite sur la fibre.

REMARQUE 2.32. Supposons que (X, x) est un espace bon et que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement universel. On a vu que π était un revêtement Galoisien de groupe $\pi_1(X, x)$ (ceci résulte de la construction même du revêtement universel donné en §2.13 ou du Théorème 2.21). En particulier $\pi_1(X, x)$ agit naturellement proprement discontinûment sur \tilde{X} en préservant la fibre $\pi^{-1}\{x\}$.

Il est important de garder en tête que cette action *ne coïncide pas* avec l'action définie au Théorème précédent, mais au contraire commute avec elle.

DÉMONSTRATION. Il faut tout d'abord vérifier que si γ_0 est homotope à γ_1 et que γ'_0, γ'_1 sont des relevés de ces lacets tels que $\gamma'_0(0) = \gamma'_1(0)$ alors $\gamma'_0(1) = \gamma'_1(1)$. Ceci résulte de la Proposition 2.10 : l'homotopie H déformant γ_0 en γ_1 se relève en une homotopie H' déformant γ'_0 en γ'_1 . Comme $H'(s, 1)$ est continue et à valeur dans l'ensemble discret $\pi^{-1}\{x\}$, cette fonction est constante.

On a donc bien une application $\pi_1(X, x) \times \pi^{-1}\{x\} \rightarrow \pi^{-1}\{x\}$. Cette application est une action du groupe fondamental sur la fibre pour la raison suivante.

Comme le lacet constant c se relève toujours en un lacet constant, il est tout d'abord clair que $[c] \cdot x' = x'$ pour tout point x' de la fibre au dessus de x .

Soient γ et γ' deux lacets de X basés en x , et $x' \in \pi^{-1}\{x\}$. Le point $p := [\gamma] \cdot ([\gamma'] \cdot x')$ est construit de la manière suivante. Soit $\Gamma' : [0, 1] \rightarrow X'$ le relèvement de $\bar{\gamma}'$ partant de x' , et $\Gamma : [0, 1] \rightarrow X'$ le relèvement de $\bar{\gamma}$ partant de $\Gamma'(1)$. Alors on a $p = \Gamma(1)$.

De l'autre coté, le point $q := ([\gamma] \cdot [\gamma']) \cdot x'$ est égal à $\theta(1)$, où θ est le relèvement de $\overline{\gamma \cdot \gamma'} = \bar{\gamma}' \cdot \bar{\gamma}$ partant de x' . Or θ est égal à $\Gamma' \cdot \Gamma$ et donc $p = q$ (c'est ici qu'il est important d'avoir relevé $\bar{\gamma}$ et non γ).

Lorsque X' est connexe par arcs, on peut joindre deux points x_1, x_2 quelconques de la fibre $\pi^{-1}\{x\}$ par un chemin γ , et par construction on a $[\pi \circ \gamma] \cdot x_1 = x_2$. L'action est donc bien transitive dans ce cas.

Calculons enfin le stabilisateur d'un point x' . Le relevé d'un lacet de la forme $\pi \circ \gamma'$ où γ' est basé en x' est égal à γ' . En particulier le stabilisateur de x' contient le groupe $\pi_*(\pi_1(X', x'))$. Réciproquement si $[\gamma] \cdot x' = x'$ alors le relevé de γ est un lacet basé en x' et donc sa classe appartient bien à $\pi_*(\pi_1(X', x'))$. \square

2.11. Groupe fondamental et théorie de Galois. Il existe plusieurs points de vue sur le groupe fondamental.

Poincaré pensait le groupe $\pi_1(X, x)$ comme la donnée des symétries de tous les revêtements au dessus X . On peut maintenant rendre cette idée précise de la manière suivante en se basant sur la description de l'action $\pi_1(X, x)$ sur les fibres expliquée à la section précédente. Le groupe fondamental est la donnée pour tout revêtement connexe pointé d'une permutation de la fibre au dessus de x , ces permutations étant soumises à des conditions de compatibilité naturelle, voir [DD, §4.6].

Ce point de vue apparemment très abstrait est important lorsque l'on cherche à faire le pont entre théorie des revêtements et théorie de Galois. En particulier il se transpose au cadre de la géométrie algébrique et permet de définir dans ce cadre des notions de groupe fondamental (dit *étale*) bien que la notion de chemins ne fasse plus sens.

Bibliographie

- [DD] DOUADY ADRIEN ET RÉGINE. *Algèbre et théorie galoisiennes*. Nouvelle bibliothèque mathématique. Cassini, Paris. 2005. x + 500 pp.
- [Ha] HATCHER, ALLEN. *Algebraic topology*. (English summary) Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.

Exercices

EXERCICE B.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

- (1) Montrer que tout lacet de Ω est homotope (à extrémités fixés) à un lacet affine par morceaux.
- (2) Montrer que tout lacet de Ω est homotope (à extrémités fixés) à un lacet γ de classe \mathcal{C}^1 tel que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t .

EXERCICE B.2. Montrer que X est simplement connexe si et seulement si toute application continue $S^1 \rightarrow X$ s'étend en une application continue du disque fermé $\{|z| \leq 1\} \rightarrow X$.

EXERCICE B.3. Soit X un espace connexe par arcs, et x_0, x_1 deux points de X . Pour tout chemin h tel que $h(0) = x_0$ et $h(1) = x_1$ on note $\varphi_h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ l'isomorphisme de groupes induit par l'application $\varphi_h(\gamma) := h \cdot (\gamma \cdot \bar{h})$.

Montrer que le groupe fondamental de X est abélien si et seulement si $\varphi_h = \varphi_{h'}$ pour toute paire de chemins h et h' reliant x_0 à x_1 .

EXERCICE B.4.

- (1) Montrer que l'application $F(\theta, t) := (\theta + 2\pi t, t)$ du cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$ dans lui-même est homotope à l'identité par une homotopie qui est l'identité sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\}$.
- (2) Montrer qu'il n'existe pas d'homotopie déformant F sur l'identité qui est l'identité sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$.

EXERCICE B.5. Soit $f_t : X \rightarrow X$ une homotopie telle que f_0 et f_1 sont toutes les deux l'identité sur X . Montrer que pour tout $x_0 \in X$ le lacet $f_t(x_0)$ représente un lacet dans le centre de $\pi_1(X, x_0)$.

EXERCICE B.6.

- (1) Montrer que $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ est isomorphe à \mathbb{Z} .
- (2) Notons \mathcal{L} l'ensemble des lacets de classe \mathcal{C}^1 par morceaux basés en 0 et à valeurs dans $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$. Montrer que l'application naturelle $\mathcal{L} \rightarrow \pi_1(\Omega, 0)$ est surjective.
- (3) Montrer que l'application $\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ définie par $\varphi(\gamma) := (\int_{\gamma} \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{z-1}, \int_{\gamma} \frac{1}{2i\pi} \frac{dz}{1+z})$ induit un morphisme surjectif de groupes $\pi_1(\Omega, 0) \rightarrow \mathbb{Z}^2$.
- (4) Montrer que Ω et \mathbb{C}^* ne sont pas homéomorphes.

EXERCICE B.7 (Degré des applications du cercle). Rappelons que $\pi_1(S^1, 1)$ est monogène et engendré par le lacet $\gamma_0(t) = \exp(2i\pi t)$.

- (1) Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ une application continue telle que $f(1) = 1$. Montrer que l'application $\gamma \mapsto f \circ \gamma$ induit un morphisme f_* de $\pi_1(S^1, 1)$ dans lui-même. On notera $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que $f_*[\gamma_0] = \deg(f)[\gamma_0]$.

- (2) Montrer que si deux applications f et g du cercle dans lui-même tels que $f(1) = g(1) = 1$ sont homotopes alors leurs degrés sont égaux.
- (3) Montrer qu'il existe une application continue $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$e^{2i\pi F(s)} = f(e^{2i\pi s})$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$, et que $F(s+1) - F(s) = \deg(f)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

- (4) Montrer que deux applications f et g du cercle dans lui-même tels que $f(1) = g(1) = 1$ sont homotopes si et seulement si leurs degrés sont égaux.

EXERCICE B.8 (Théorème de d'Alembert). Supposons par l'absurde que $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ n'admettant aucun zéro (donc $a_n \neq 0$).

- (1) Montrer que

$$f_r(t) = \frac{P(re^{2i\pi t})/P(r)}{|P(re^{2i\pi t})/P(r)|}$$

définit une application continue du cercle dans lui-même qui fixe 1.

- (2) Montrer que la fonction $r \mapsto \deg(f_r)$ est constante.
- (3) Montrer que pour toute application continue $f : S^1 \rightarrow S^1$ telle que $f(1) = 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\deg(g) = \deg(f)$ pour toute application $g : S^1 \rightarrow S^1$ telle que $g(1) = 1$ et $|g - f| \leq \epsilon$.
- (4) Conclure.

EXERCICE B.9. Soit X un espace métrique localement simplement connexe, et $x_0 \in X$. On note $C(S^1, X)$ l'espace des fonctions continues du cercle dans X qui envoient 1 sur x_0 . On le munit de la topologie de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $\mathcal{C}(S^1, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}(S^1, X)$ sur $\pi_1(X, x_0)$.

EXERCICE B.10. Montrer que si X est un rétract par déformation de Y , alors X est homotopiquement équivalent à Y .

Remarque : on peut démontrer que si X et Y sont homotopiquement équivalents, alors il existe un espace Z contenant à la fois X et Y qui se rétracte par déformation sur X et sur Y . Voir Hatcher, Corollary 0.21.

EXERCICE B.11. Soit X un espace topologique localement connexe par arcs et $x_0 \in X$. On note $X \vee S^1$ la somme pointée de (X, x_0) et $(S^1, 1)$. On note $i : X \rightarrow X \vee S^1$, et $j : S^1 \rightarrow X \vee S^1$ les injections canoniques.

- (1) Montrer que le morphisme $i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \vee S^1, i(x_0))$ est toujours injectif.
- (2) Montrer que le morphisme $i_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \vee S^1, i(x_0))$ n'est jamais surjectif.

- (3) Montrer que si X est simplement connexe l'application $j_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(X \vee S^1, i(x_0))$ est isomorphisme.

EXERCICE B.12. Soit G un groupe topologique, c'est-à-dire un espace topologique muni d'une structure de groupe tel que les applications $(g, g') \mapsto gg'$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont continues. On note e l'élément neutre de G .

- (1) Montrer que pour tous lacets γ, γ' , le lacet $t \mapsto \gamma(t)\gamma'(t)$ est homotope $\gamma \cdot \gamma'$.
- (2) Montrer que $\pi_1(G, e)$ est un groupe abélien.

EXERCICE B.13. Montrer qu'à tout instant, il existe deux points antipodaux sur la terre en lesquels la température et le degré d'humidité sont les mêmes.

EXERCICE B.14.

- Ecrivons la sphère S^2 comme union de trois ensembles fermés A_1, A_2 et A_3 . Montrer qu'au moins l'un d'entre eux contient une paire de points antipodaux.
- Montrer que l'on peut décomposer la sphère en quatre sous-ensembles fermés (non nécessairement disjoints) ne contenant chacun aucune paire de points antipodaux.

EXERCICE B.15. Montrer que tout homéomorphisme local $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces compacts est un revêtement fini.

EXERCICE B.16. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un revêtement avec Y localement connexe. Montrer que la restriction de π toute composante connexe X_i de X induit un revêtement $\pi : X_i \rightarrow \pi(X_i)$.

EXERCICE B.17. Soit $\pi : M \rightarrow N$ un revêtement fini. Montrer que N est compact si et seulement si M est compact.

EXERCICE B.18. Soit N est un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Montrer que si $\pi_1(N)$ est fini, alors toute application continue $N \rightarrow S^1$ est homotope à une application constante.

EXERCICE B.19. Soit G un groupe topologique localement compact et H un sous-groupe discret de G . On munit l'espace des classes à gauche G/H de la topologie quotient. Montrer que $G \rightarrow G/H$ est un revêtement.

EXERCICE B.20. Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe \mathcal{C}^1 entre deux variétés lisses compactes et connexes.

- (1) Montrer que f est un revêtement dès que la différentielle $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ est inversible en tout point $x \in M$.
- (2) Donner un exemple montrant que cette condition n'est pas nécessaire.

EXERCICE B.21. Soit $\pi : X \rightarrow B$, et $\pi' : X' \rightarrow X$ deux revêtements.

- (1) Montrer que si π est fini, alors $\pi \circ \pi'$ est encore un revêtement.
- (2) Montrer que si B est localement simplement connexe, alors $\pi \circ \pi'$ est encore un revêtement.

- (3) On note B l'union pour tout $n \geq 1$ des cercles C_n de rayon $\frac{1}{n}$ et centres en $(\frac{1}{n}, 0)$ dans \mathbb{R}^2 . Montrer que B est compact et localement connexe par arcs?
- (4) Pour chaque n construire un revêtement $E_n \rightarrow B$ tel que sa restriction au dessus de C_n est un revêtement simplement connexe, et au dessus de chaque E_m est une union disjointe de revêtements triviaux.
- (5) Montrer que B n'est ni localement simplement connexe, ni semi-localement simplement connexe.
- (6) On note E l'union disjointe des E_n munie de la projection canonique π_E sur $B \times \mathbb{N}^*$. Montrer que $\pi_E : E \rightarrow B \times \mathbb{N}^*$ est un revêtement.
- (7) Montrer que la composition de π_E avec la projection sur le premier facteur $B \times \mathbb{N}^* \rightarrow B$ n'est pas un revêtement.

EXERCICE B.22. On considère le sous-ensemble X de \mathbb{R}^2 obtenu comme union de l'adhérence \bar{G} du graphe $\{(x, 1 - \sin(\frac{1}{x})), 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\}$, et des trois segments $I_1 = \{0\} \times [-1, 0]$, $I_2 = [0, \frac{2}{\pi}] \times \{-1\}$, et $I_3 = \{\frac{2}{\pi}\} \times [-1, 0]$.

On note $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application identité sur les trois segments I_1, I_2, I_3 , et qui est la première projection en restriction à \bar{G} .

- (1) Montrer que $\pi_1(X, 0)$ est le groupe trivial.
- (2) Montrer qu'il n'existe pas de relèvement de f au revêtement universel de C , i.e. il n'existe pas d'application continue $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi(F(x))$ où $\pi : \mathbb{R} \rightarrow C$ est un revêtement universel.
- (3) Conclure.

EXERCICE B.23. Soient S' et S deux surfaces de Riemann compactes, et $f : S' \rightarrow S$ une application holomorphe non constante. Rappelons qu'un point de ramification pour f est un point $z \in S'$ au voisinage duquel f n'est pas localement injective.

- (1) Montrer que l'ensemble R_f des points de ramification est un ensemble fini.
- (2) Montrer que si R_f est vide, alors f est un revêtement fini.
- (3) Montrer que si R_f n'est pas vide, alors f n'est pas un revêtement.
- (4) Montrer que $f : S' \setminus f^{-1}(f(R_f)) \rightarrow S \setminus f(R_f)$ est un revêtement fini.

EXERCICE B.24. Soit $\pi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un revêtement connexe. On suppose Y localement connexe par arcs.

- (1) Montrer que le morphisme $\pi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ est injectif.
- (2) Montrer qu'un lacet de Y basé en y_0 se relève en un lacet si et seulement si sa classe est dans $\pi_*\pi_1(X, x_0)$.
- (3) On suppose le revêtement fini. Montrer que le degré de π est égal à l'indice du sous-groupe $\pi_*(\pi_1(X, x_0))$ de $\pi_1(Y, y_0)$.

EXERCICE B.25. Soit (X, x) un espace topologique bon et $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ son revêtement universel. On rappelle que ce dernier est Galoisien de groupe $\pi_1(X, x)$. Montrer que l'action induite par $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ commute avec l'action définie en §2.10.

EXERCICE B.26. Soit $\pi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un revêtement connexe. On note $H = \pi_*(\pi_1(X, x_0))$ le sous-groupe de $\pi_1(Y, y_0)$.

Montrer que le groupe des automorphismes de revêtements est isomorphe au quotient du normalisateur de H dans $\pi_1(Y, y_0)$ par H .

On rappelle que le normalisateur $N(H, G)$ d'un sous-groupe H d'un groupe G est constitué des éléments $g \in G$ tels que $gH = Hg$.

EXERCICE B.27. Une *couronne* est une surface de Riemann connexe dont le groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} . On suppose acquis le fait que toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, \mathbb{C} , ou \mathbb{H} .

- (1) Montrer que toute couronne est biholomorphe à l'un des modèles suivants : \mathbb{C}^* , \mathbb{D}^* , ou $C(a, b) := \{z \in \mathbb{C}, a < |z| < b\}$ pour deux réels positifs non nuls.
- (2) Montrer que $C(a, b)$ est biholomorphe à $C(a', b')$ si et seulement si $a/b = a'/b'$.

EXERCICE B.28. Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d \geq 2$. On note $R_P = \{z, P'(z) = 0\}$, et $V_P = P(R_P)$.

- (1) Montrer que l'application $P : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(V_P) \rightarrow \mathbb{C} \setminus V_P$ est un revêtement fini de degré d .
- (2) On suppose que le revêtement précédent est galoisien. Montrer qu'il existe un sous-groupe G de cardinal d du groupe affine tel que $P \circ g = P$ pour tout $g \in G$.
- (3) A quelle condition le revêtement induit par le polynôme $P(T) = T^3 + aT + b$ est-il galoisien ?

EXERCICE B.29.

- (1) Classer tous les revêtements connexes (à isomorphisme près) du cercle S^1 .
- (2) Classer tous les revêtements connexes (à isomorphisme près) du disque épointé \mathbb{D}^* .
- (3) Classer tous les revêtements connexes (à isomorphisme près) du tore $S^1 \times S^1$.

EXERCICE B.30.

- (1) Classer tous les revêtements connexes de $S^1 \vee S^1$ de degré 2. [indication : ne *pas* utiliser la correspondance de Galois !]
- (2) Classer tous les revêtements connexes de $S^1 \vee S^1$ de degré 3.
- (3) Montrer que le groupe fondamental de $S^1 \vee S^1$ n'est pas abélien.

EXERCICE B.31. Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{Q}))$ n'est ni dénombrable, ni abélien.

EXERCICE B.32.

- (1) Montrer que tout groupe agissant par homéomorphismes proprement discontinument et sans point fixe sur le cercle S^1 est fini cyclique.

- (2) Montrer que tout revêtement $S^1 \rightarrow X$ est galoisien.
- (3) Construire des actions libres de groupes finis non cycliques sur la sphère $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = +1\}$.

Remarque : on peut démontrer que seul $\mathbb{Z}/2$ agit librement sur la sphère S^2 .

Surfaces de Riemann compactes

Le but de ce dernier chapitre est d'explorer plus en détail les surfaces de Riemann compactes. Nous allons tout d'abord décrire la topologie de ces surfaces, et introduire la notion de genre qui est un entier $g \geq 0$. Nous allons ensuite expliquer comment cet invariant topologique possède une interprétation en termes d'objets holomorphes.

1. Classification topologique des surfaces de Riemann compactes

Le type topologique des surfaces de Riemann compactes (i.e. leur classe d'homéomorphie) est très contraint.

THÉORÈME 1.1. *Soit S une surface de Riemann compacte. Alors S est homéomorphe à la sphère S^2 ou à un polygone régulier à $4g$ cotés où les cotés sont recollés en identifiant a_i avec a_i^{-1} (et b_i avec b_i^{-1}) en renversant le sens de parcours de ceux-ci.*

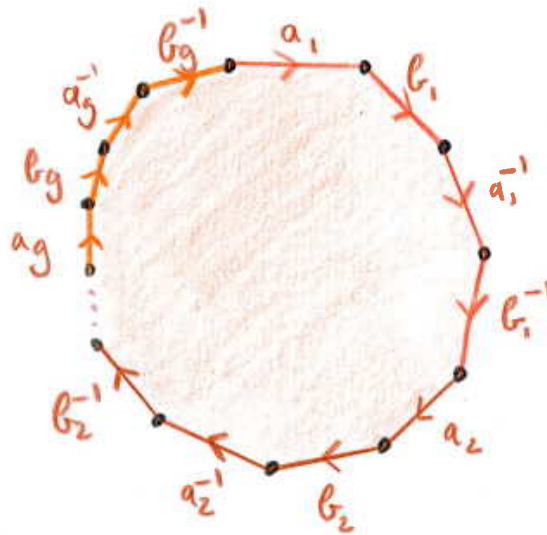


FIGURE 1. Le polygone définissant une surface compacte

On note M_g la surface obtenue par recollement d'un polygone à $4g$ cotés comme dans l'énoncé du théorème. Observons que l'on obtient sur le quotient une structure cellulaire qui comporte $2g$ arêtes (les images des cotés a_i et b_i), 1 sommet (les bord de tous les cotés sont identifiés dans M_g), et 1 face.

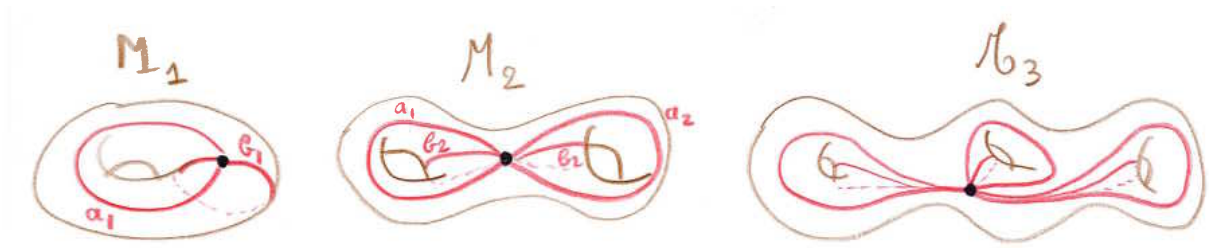
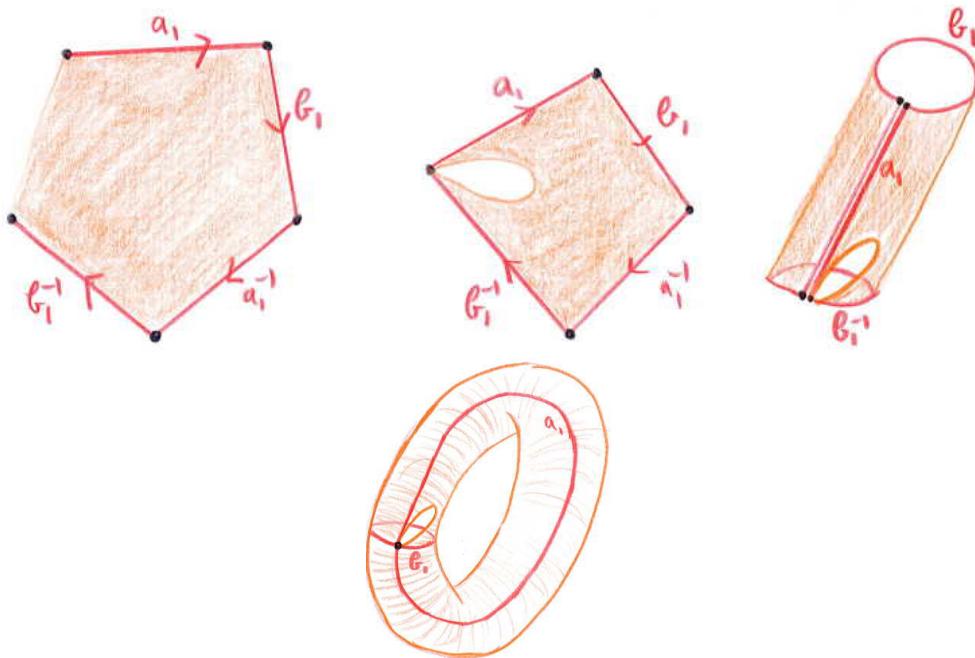


FIGURE 2. Surfaces de genre 1, 2, et 3

COROLLAIRE 1.2. *Toute surface de Riemann compacte est homéomorphe à une sphère avec g anses.*

DÉMONSTRATION. Le recollement de 4 cotés consécutifs a, b, a^{-1}, b^{-1} donne un tore troué comme le montre la figure ci-contre.



Le recollement des tores troués nous donne un tore avec g trous comme sur la figure ci-dessous où $g = 2$. Enfin un tore à g trous est une sphère avec g anses. \square

La démonstration du théorème est donnée à la section suivante et est de nature combinatoire.

THÉORÈME 1.3. *Le groupe fondamental de M_g est isomorphe au groupe fondamental de M_h si et seulement si $g = h$. En particulier si M_g et M_h sont homéomorphes alors $g = h$.*

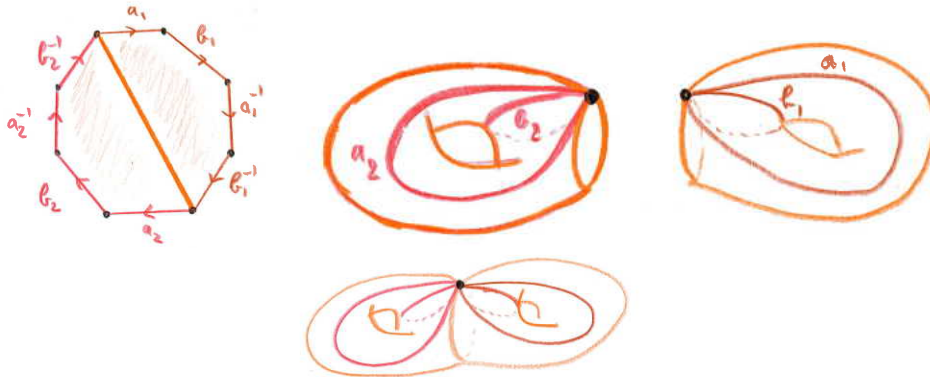


FIGURE 3. Du polygône à 8 cotés au tore à 2 trous

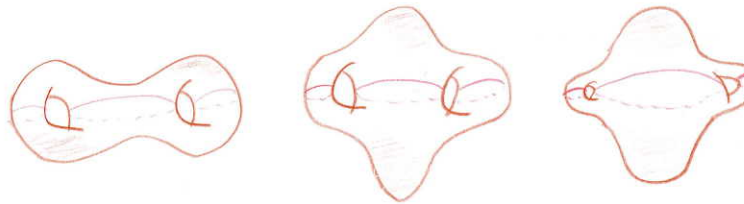


FIGURE 4. Du tore à 2 trous à la sphère à 2 anses

Cet énoncé rend licite la définition suivante.

DÉFINITION. Le genre d'une surface de Riemann compacte S est 0 si celle-ci est la sphère de Riemann et est l'unique entier $g \geq 1$ tel que S est homéomorphe à M_g sinon.

On va tout d'abord s'attacher à calculer le groupe fondamental de ces surfaces. Pour cela il nous faut faire tout d'abord quelques rappels de théorie des groupes.

2. Groupe fondamental des surfaces de Riemann compactes

2.1. Rappel sur les groupes libres. Nous introduisons trois constructions importantes de groupes.

Le *groupe libre* F_S basé sur un ensemble S est un groupe engendré par une famille e_s indexée par S et qui ne possède aucune relation en dehors des équations du type $e_s e_s^{-1} = e_s^{-1} e_s = e$.

Pour le définir formellement on peut procéder comme suit. On considère tout d'abord l'ensemble \mathcal{F}_S des suites finies (éventuellement vide) de paires

$$g = (\{s_1, n_1\}, \{s_2, n_2\}, \dots, \{s_m, n_m\})$$

avec $s_i \in S$, $n_i \in \mathbb{Z}^*$. On note cet objet de manière plus suggestive $g = s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_m^{n_m}$. On munit cet ensemble d'une loi par concaténation

$$(s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_m^{n_m}) \cdot (s_{m+1}^{n_{m+1}} s_{m+2}^{n_{m+2}} \dots s_{m+l}^{n_{m+l}}) := s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_m^{n_m} s_{m+1}^{n_{m+1}} s_{m+2}^{n_{m+2}} \dots s_{m+l}^{n_{m+l}}.$$

Cette loi est associative et possède un élément neutre (la liste vide) que l'on note e , mais aucun élément en dehors de e ne possède un inverse.

Le groupe libre F_S est obtenu en quotientant \mathcal{F}_S par la relation d'équivalence engendrée par les identités $s^n s^m = s^{n+m}$ pour tout $s \in S$ et toute paire d'entiers $n, m \in \mathbb{Z}$ avec la convention $s^0 = e$. En termes imagés, on autorise les "simplifications évidentes". Il n'est pas difficile de voir que la loi passe bien au quotient par cette relation et que tout élément $g = s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_m^{n_m}$ admet alors pour inverse $g = s_m^{-n_m} \dots s_2^{-n_2} s_1^{-n_1}$.

Rappelons que l'abélianisé d'un groupe G quelconque est le groupe quotient $\text{Ab}(G) := G/[G, G]$ où $[G, G]$ est le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $[g, g'] := gg'g^{-1}(g')^{-1}$. Il est caractérisé par la propriété suivante : tout morphisme $G \rightarrow H$ vers un groupe abélien se factorise par $G/[G, G]$.

LEMME 2.1. *Pour tout ensemble fini S , le groupe $F_S/[F_S, F_S]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{\#S}$.*

DÉMONSTRATION. Notons $S = \{s_1, \dots, s_r\}$. Pour tout élément de F_S écrit sous la forme

$$g = s_{i_1}^{n_1} s_{i_2}^{n_2} \dots s_{i_m}^{n_m}$$

on pose $\varphi_j(g) := \sum_{i_l=j} n_l$. Cette application est bien définie et ne dépend pas de l'écriture choisie de g , et induit un morphisme de F_S vers \mathbb{Z} . En posant $\varphi(g) := (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ on obtient un morphisme de F_S vers \mathbb{Z}^r . Ce morphisme est clairement surjectif. Comme \mathbb{Z}^r est abélien, son noyau contient tous les commutateurs de F_S et donc $[F_S, F_S]$.

Soit $g = s_{i_1}^{n_1} s_{i_2}^{n_2} \dots s_{i_m}^{n_m}$ dans le noyau de φ . On va montrer par récurrence sur m que g est dans $[F_S, F_S]$. C'est évident pour $m = 0, 1, 2$. Sinon on peut supposer que $n_1 \neq 0$ et que $i_2 \neq i_1$. Comme $\varphi_{i_1}(g) = 0$, il existe un autre indice $i_j = i_1$. L'élément $g' := s_{i_2}^{n_2} \dots s_{i_j}^{n_1+n_j} \dots s_{i_m}^{n_m}$ est dans le noyau de φ et par récurrence dans $[F_S, F_S]$. On conclut alors en remarquant que $g' = [s_{i_2}^{n_2} \dots s_{i_{j-1}}^{n_{j-1}}, s_{i_1}^{n_1}]g$. \square

Le *produit libre de groupes* est une variation sur la construction précédente. On se donne G_α une famille de groupes indéxée par un ensemble A et d'élément neutre e_α . On veut construire un groupe $G := \star_\alpha G_\alpha$ qui est engendré par tous les G_α de telle sorte qu'aucune relation n'est autorisé entre des éléments appartenant à G_α et G_β pour $\alpha \neq \beta$ en dehors des égalités $e_\alpha = e_\beta$.

On procède comme dans le cas des groupes libres. Un élément de G est une liste finie $g_1 g_2 \dots g_m$ avec $g_i \in \sqcup_\alpha G_\alpha$, modulo la relation d'équivalence engendrée par les identités $g_1 g_2 = (g_1 \cdot_\alpha g_2)$ pour toute paire $g_1, g_2 \in G_\alpha$. Ici $g_1 g_2$ désigne la liste à deux éléments, et $(g_1 \cdot_\alpha g_2)$ la liste à un élément constitué du produit de g_1 et g_2 dans le groupe G_α . Le produit est donné par concaténation.

Le groupe G possède la propriété caractéristique suivante.

PROPOSITION 2.2. *Les injections canoniques $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow \star_\alpha G_\alpha$ sont des morphismes de groupes. Étant donné un groupe quelconque H et des morphismes de groupes $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, il existe un unique morphisme de groupe $h : \star_\alpha G_\alpha \rightarrow H$ de telle sorte que $h_\alpha = h \circ i_\alpha$ pour tout α .*

Voir [Ha, pp.41-42].

Le *produit amalgamé de groupes* est une généralisation de la construction précédente. On traite uniquement le cas de deux groupes. On se fixe deux groupes G_1 et G_2 et un autre groupe N muni de deux morphismes de groupes $\varphi_1 : N \rightarrow G_1$ et $\varphi_2 : N \rightarrow G_2$. Le groupe $G_1 \star_N G_2$ est le groupe libre engendré par G_1 et G_2 où l'on rajoute toutes les relations venant de N . Par définition c'est donc le quotient de $G_1 \star G_2$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments de la forme $\varphi_1(n)\varphi_2^{-1}(n)$. (i.e. engendré par tous les conjugués de tels éléments).

PROPOSITION 2.3. *Les injections canoniques $i_1 : G_1 \rightarrow G_1 \star_N G_2$ et $i_2 : G_2 \rightarrow G_1 \star_N G_2$ sont des morphismes de groupes.*

Étant donné un groupe quelconque H et des morphismes de groupes $h_1 : G_1 \rightarrow H$, $h_2 : G_2 \rightarrow H$ tels que $h_1 \circ \varphi_1 = h_2 \circ \varphi_2$, il existe un unique morphisme de groupe $h : G_1 \star_N G_2 \rightarrow H$ de telle sorte que $h_1 = h \circ i_1$ et $h_2 = h \circ i_2$.

En d'autres termes on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & H \\
 & & & \nearrow^{h_1} & \nearrow^h \\
 G_1 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \star_N G_2 & & \\
 \uparrow \varphi_1 & & \uparrow i_2 & \searrow^{h_2} & \\
 N & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 & &
 \end{array}$$

La démonstration découle directement de la proposition précédente.

Le point important à retenir est que le groupe $G_1 \star_N G_2$ est caractérisé à isomorphisme près par cette propriété. Tout groupe \tilde{G} muni de morphismes $G_1 \rightarrow \tilde{G}$, $G_2 \rightarrow \tilde{G}$ pour lesquels la proposition ci-dessus reste vraie est isomorphe à $G_1 \star_N G_2$.

A quoi tout cela sert-il? Tout groupe est le quotient d'un groupe libre par un sous-groupe normal.

Soit G un groupe quelconque, et $\{g_s\}_{s \in S}$ une famille génératrice (on peut prendre évidemment $A = G$, mais il est plus intéressant de prendre un ensemble S le plus petit possible). On possède alors d'un morphisme canonique $F_S \rightarrow G$ qui envoie α sur g_α , et G est isomorphe au quotient de F_S par le noyau de ce morphisme.

Lorsque G admet une famille génératrice finie, on dira que G est de type fini. Lorsque G est de type fini engendré par une partie finie S et que le noyau $F_S \rightarrow G$ est lui-même finiment engendré alors on dira que G est de présentation finie.

Lorsque G est de présentation finie engendré par s_1, \dots, s_r et que le noyau du morphisme $F_S \rightarrow G$ est engendré par des éléments $m_1, \dots, m_l \in F_S$, il est commun de noter

$$G := \langle s_1, \dots, s_r \mid m_1, \dots, m_l \rangle .$$

Une telle présentation d'un groupe est dite par générateurs et relations.

2.2. Le Théorème de Van Kampen.

THÉORÈME 2.4. *Soit (X, x) un espace topologique pointé localement compact, connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-simplement localement connexe.*

On suppose que U_1 et U_2 sont deux ouverts connexes par arcs contenant x , que $U_1 \cap U_2$ est encore connexe par arcs, et que $X = U_1 \cup U_2$. On note $i_1 : \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \rightarrow \pi_1(U_1, x)$ et $i_2 : \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \rightarrow \pi_1(U_2, x)$ les morphismes donnés par les inclusions $U_1 \cap U_2 \subset U_1$, et $U_1 \cap U_2 \subset U_2$.

Alors le groupe fondamental de X est isomorphe au produit amalgamé

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(U_1, x) \star_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2, x)$$

donné par les applications i_1 et i_2 .

Cet énoncé n'est pas le plus général possible, et il existe une version où X est recouvert par un nombre arbitraire d'ouverts voir [Ha, Theorem 1.20]. Les hypothèses de locale compacité, locale connexité et de semi-simple connexité sont de plus superflues. Par contre le fait que tous les ouverts U_1 , U_2 et $U_1 \cap U_2$ soient connexes est crucial.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. On veut démontrer que $\pi_1(X, x)$ vérifie la propriété caractéristique du produit amalgamé décrit à la Proposition 2.3. On se donne donc deux morphismes $h_1 : \pi_1(U_1, x) \rightarrow H$, et $h_2 : \pi_1(U_2, x) \rightarrow H$ tels que $h_1 \circ \varphi_1 = h_2 \circ \varphi_2$ où φ_1 et φ_2 sont les morphismes de groupes induits par les inclusions de $U_1 \cap U_2$ dans U_1 et U_2 respectivement.

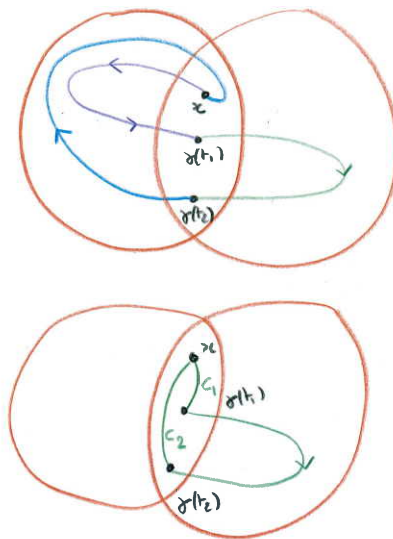
Le premier point est de montrer que $\pi_1(X, x)$ est engendré par l'image des deux groupes $\pi_1(U_1, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ et $\pi_1(U_2, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$. En effet cette propriété implique que si $h : \pi_1(X, x) \rightarrow H$ avec $h \circ i_1 = h \circ i_2$ existe alors ce morphisme est unique (ici i_1 et i_2 sont les morphismes induits par les inclusions $U_1 \subset X$ et $U_2 \subset X$).

Soit γ un lacet basé en x . Comme $[0, 1]$ est compact, on peut trouver une suite finie $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ telle que $\gamma[t_i, t_{i+1}]$ est complètement inclus soit dans U_1 , soit dans U_2 . Comme l'ouvert $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, on peut trouver des chemins $c_i : [0, 1] \rightarrow U_1 \cap U_2$ tels que $c_i(0) = x$ et $c_i(1) = \gamma(t_i)$ (voir la figure). Finalement γ est homotope au lacet

$$(\gamma_{[t_1, t_2]} \cdot c_2) \cdot (\bar{c}_2 \cdot \gamma_{[t_2, t_3]} \cdot c_3) \dots (\bar{c}_{n-1} \cdot \gamma_{[t_{n-1}, t_n]})$$

ce qui conclut la preuve.

Pour construire le morphisme h , on utilise la correspondance de Galois. On fixe $p_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ et $p_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow U_2$ des revêtements universels.



On a une action à gauche de $\pi_1(U_1, x)$ sur H , et on va utiliser celle-ci pour construire un nouveau revêtement $E_1 \rightarrow U_1$ qui consiste à remplacer la fibre $p_1^{-1}(x)$ par H .

Concrètement, on regarde le revêtement $H \times \tilde{U}_1 \rightarrow U_1$ donné par la composition de la première projection suivie de p_1 . L'espace total $H \times \tilde{U}_1$ est naturellement muni d'une action de $\pi_1(X, x)$: un élément $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ agit par multiplication à gauche dans H en envoyant h sur $h_1([\gamma])h \in H$; il agit par composition¹ à droite sur \tilde{U}_1 en envoyant la classe du chemin c sur la classe de $c \cdot \bar{\gamma} \in \tilde{U}_1$. On munit H de la topologie discrète : comme X est localement compact, l'action de $\pi_1(U_1, x)$ sur $H \times \tilde{U}_1$ est alors proprement discontinue et sans point fixe, et on définit E_1 comme l'espace quotient $H \times \tilde{U}_1 / \pi_1(U_1, x)$.

On a une identification canonique de la fibre F au dessus de x dans E_1 avec H . Remarquons tout d'abord que la fibre au dessus de x dans \tilde{U}_1 est constituée des classes d'homotopie de lacets basés en x et est donc canoniquement paramétrée par $\pi_1(X, x)$. Ensuite la fibre F est le quotient de $H \times \pi_1(X, x)$ par l'action naturelle de $\pi_1(X, x)$ et l'application $(h, [\gamma]) \mapsto h_1([\gamma]) \cdot h$ donne l'identification recherchée.

À travers cette identification, il est clair que l'action naturelle de $\pi_1(U_1, x)$ sur la fibre au dessus de x est donnée par le morphisme de groupes $h_1 : \pi_1(U_1, x) \rightarrow H$. On notera $x_1 \in E_1$ le point de la fibre au dessus de x correspondant à l'élément neutre de H .

On peut maintenant réaliser la même construction avec U_2 : on obtient un revêtement pointé $(E_2, x_2) \rightarrow (U_2, x)$ dont la fibre au-dessus de x est canoniquement identifiée à H .

¹. comme dans la construction du revêtement associé à un sous-groupe du groupe fondamental à la page 73

Regardons maintenant les restrictions de E_1 et E_2 à $U_1 \cap U_2$. Nous affirmons que ces deux revêtements (pointés) sont isomorphes. Soit $h : E_1|_{U_1 \cap U_2} \rightarrow E_2|_{U_1 \cap U_2}$ un isomorphisme de revêtement qui envoie x_1 sur x_2 . On construit maintenant un revêtement $\pi : E \rightarrow X$ en recollant E_1 avec E_2 au dessus de $U_1 \cap U_2$ en identifiant $y \in E_2$ avec $h(y) \in E_1$. On remarque que $\pi^{-1}\{x\}$ est à nouveau canoniquement identifié à H car les deux points x_1 et x_2 sont identifiés dans E . L'action de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $\pi^{-1}\{x\}$ induit donc un morphisme $h : \pi_1(X, x) \rightarrow H$. Comme l'action de $\pi_1(U_1, x)$ (resp. $\pi_1(U_2, x)$) sur la fibre est donnée par le morphisme h_1 (resp. h_2), on a bien $h \circ i_1 = h_1$ (resp. $h \circ i_2 = h_2$).

Pour conclure, il nous faut donc justifier le fait que les deux revêtements $E_1|_{U_1 \cap U_2}$ et $E_2|_{U_1 \cap U_2}$ sont isomorphes. Pour voir celà, on regarde l'action de $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ sur la fibre au dessus de x dans E_1 . Rappelons que cette fibre est canoniquement identifiée à H , et que cette action est donnée par le morphisme $h_1 \circ \varphi_1$. Or $h_1 \circ \varphi_1 = h_2 \circ \varphi_2$ par hypothèse et donc les actions de $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ sur les fibres au dessus de x dans E_1 et E_2 sont identiques.

On peut alors construire un isomorphisme de revêtement entre E_1 et E_2 comme suit. Soit $y \in E_1$, γ_1 un chemin quelconque partant d'un point $h \in H$ de la fibre au dessus de x dans E_1 et aboutissant en y , et γ son image dans $U_1 \cap U_2$. On pose alors $h(y) := \gamma_2(1)$ où γ_2 est le relèvement de γ dans E_2 partant de h . Le fait que les actions $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ sur les fibres au dessus de x dans E_1 et E_2 sont identiques implique que $h(y)$ est bien définie et ne dépend pas du choix de chemin γ_1 .

Par construction h est un morphisme de revêtement. C'est un isomorphisme car h induit une bijection entre les fibres de deux revêtements au dessus de x . \square

REMARQUE 2.5. Cette démonstration utilise de manière implicite une correspondance bi-univoque naturelle entre revêtements (non nécessairement connexes) $\pi : X' \rightarrow X$ au dessus d'un espace topologique pointé et action de $\pi_1(X, x)$ sur les ensembles. Cette correspondance est construite de la manière suivante. Étant donné un revêtement π , on regarde l'action de $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $\pi^{-1}\{x\}$. Réciproquement, si $\pi_1(X, x)$ agit sur un ensemble F , alors on construit le revêtement $F \times \tilde{X} / \pi_1(X, x) \rightarrow X$ comme ci-dessus.

On renvoie à [DD, § 4.5.3] pour plus de détails (en prenant E comme le revêtement universel de X dans op.cit.).

2.3. Groupe fondamental des surfaces compactes.

THÉORÈME 2.6. *Soit (S, x) une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$. Le groupe $\pi_1(S, x)$ est alors isomorphe au groupe $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$.*

COROLLAIRE 2.7. *L'abélianisé de $\pi_1(S, x)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^{2g} . En particulier deux surfaces de Riemann compactes sont homéomorphes si et seulement si elles ont même genre.*

DÉMONSTRATION. Le théorème précédent dit exactement qu'il existe un morphisme surjectif du groupe libre de rang $2g$

$$\varphi : F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}} \rightarrow \pi_1(X, x)$$

dont le noyau est engendré par le produit de commutateurs $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$.

Comme tout commutateur est envoyé par un morphisme de groupes sur un commutateur, on en déduit l'existence d'un morphisme $\psi : \text{Ab}(F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}}) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X, x))$. Ce morphisme est surjectif car φ et le morphisme canonique $\pi_1(X, x) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X, x))$ sont tous les deux surjectifs.

Par ailleurs $\pi_1(X, x)$ est le quotient de $F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}}$ par un sous-groupe inclus dans $[F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}}, F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}}]$ et donc il existe un morphisme surjectif canonique $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Ab}(F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}})$. La propriété universelle/caractéristique de l'abélianisé donne alors un morphisme $\theta : \text{Ab}(\pi_1(X, x)) \rightarrow \text{Ab}(F_{\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}})$ qui reste surjectif. La composée de $\varphi \circ \rho$ est égale à la projection canonique $\pi : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X, x))$ donc $\varphi \circ \rho \circ \pi = \pi$. Comme π est surjectif, $\varphi \circ \rho = \text{id}$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.6. On applique le théorème de Van Kampen au modèle M_g . Le premier ouvert U est donné par l'intérieur du polygone, et le second V par un voisinage tubulaire de son bord comme sur la figure ci-dessous.

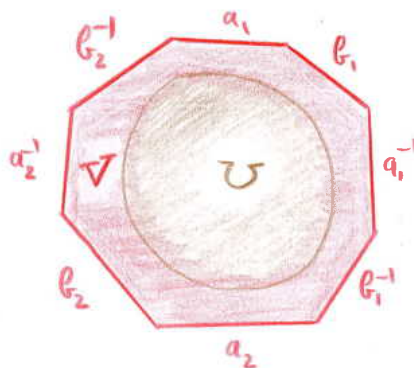


FIGURE 5. Calcul du groupe fondamental de M_g

Comme U est simplement connexe, on en déduit que $\pi_1(M_g)$ est le quotient de $\pi_1(V)$ par l'image de $\pi_1(U \cap V)$ dans $\pi_1(V)$, et donc par le lacet $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$.

L'ouvert V est un anneau qui se rétracte alors sur un bouquet de $2g$ cercles. On montre par récurrence sur le nombre de cercles que le groupe fondamental d'un tel espace est un groupe libre engendré par l'ensemble des boucles. \square

2.4. Triangulation des surfaces de Riemann compactes. Une triangulation (sous-entendue finie) d'une surface de Riemann compacte S est la donnée d'un

recouvrement fini de S par des images du triangle $T \subset \mathbb{C}$ obtenu comme enveloppe convexe de $0, 1$ et $e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Plus précisément, un triangle dans S est la donnée d'une application continue injective $j : T \rightarrow S$. Les sommets du triangle sont les images des trois points $j(0)$, $j(1)$ et $j(e^{\frac{i\pi}{3}})$; et les arêtes sont les images des trois segments $[0, 1]$, $\{1 - s + se^{\frac{i\pi}{3}}\}_{s \in [0,1]}$ et $\{se^{\frac{i\pi}{3}}\}_{s \in [0,1]}$. Un triangle possède toujours 3 sommets et 3 arêtes.

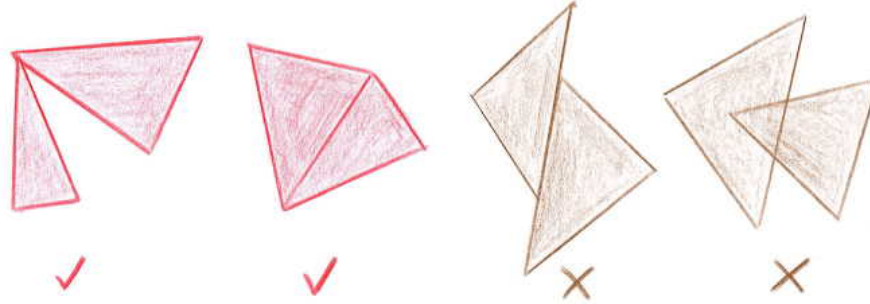


FIGURE 6. Exemples et contre-exemples de triangulations

Une triangulation \mathcal{T} de S est la donnée d'un ensemble fini de triangles $j_\alpha : T \rightarrow S$ recouvrant S , c'est-à-dire tel que $S = \cup_\alpha j_\alpha(T)$ et de telle sorte que toute intersection $j_\alpha(T) \cap j_\beta(T)$ pour $\alpha \neq \beta$ est soit vide, soit une arête, soit un sommet.

LEMME 2.8. Soit \mathcal{T} une triangulation de S et $j_\alpha : T \rightarrow S$ un triangle de \mathcal{T} .

- (1) Un point dans l'image par j_α de l'intérieur de T dans \mathbb{C} n'appartient à aucun autre triangle $j_\beta(T)$ de la triangulation.
- (2) Un point dans l'image par j_α d'une arête de T qui n'est pas un sommet appartient à exactement deux triangles (l'un étant $j_\alpha(T)$).
- (3) Un point p dans l'image par j_α d'un sommet de T appartient à $k \geq 3$ triangles $j_\alpha = j_{\alpha_0}, j_{\alpha_1}, \dots, j_{\alpha_k}$ tels que $j_{\alpha_i}(T) \cap j_{\alpha_{i+1}}(T)$ est une arête commune contenant p pour tout i modulo k , et $\cup_i j_{\alpha_i}(T)$ est un voisinage (compact) de p .

DÉMONSTRATION. Le premier point suit du fait que l'intersection de deux triangles est nécessairement une arête ou un sommet (ou vide).

Prenons un point p dans l'image d'une arête (mais pas un sommet). Soit k le nombre de triangles contenant cette arête. On veut démontrer que $k = 2$. Remarquons que p appartenant à une surface de Riemann, il possède une base de voisinages compacts $U_{n+1} \subset U_n$ chacun homéomorphe à un disque fermé, et tels que les morphismes $\pi_1(U_{n+1} \setminus \{p\}) \rightarrow \pi_1(U_n \setminus \{p\})$ sont des isomorphismes et $\pi_1(U_{n+1} \setminus \{p\}) \simeq \mathbb{Z}$. Si $k = 1$, p admet une base de voisinages compacts $U_{n+1} \subset U_n$ chacun homéomorphe à un demi-disque, et tels que $\pi_1(U_n \setminus \{p\})$ est trivial ce qui n'est pas possible. Si $k \geq 3$, alors le point p a une base de voisinages compacts $U_{n+1} \subset U_n$ chacun

homéomorphe à une union de k demi-disques recollés le long de leur diamètre, tels que les morphismes $\pi_1(U_{n+1} \setminus \{p\}) \rightarrow \pi_1(U_n \setminus \{p\})$ sont des isomorphismes. Comme chaque ouvert est $U_{n+1} \setminus \{p\}$ est un rétracte par déformation d'un bouquet de $k - 2$ cercles, on en déduit que $\pi_1(U_{n+1} \setminus \{p\})$ est un groupe libre à $k - 2$ générateurs, et ne peut donc être abélien si $k \geq 3$. A nouveau, on obtient une contradiction.

La dernière assertion suit du point précédent. \square

THÉORÈME 2.9. *Étant donné un recouvrement ouvert U_i d'une surface de Riemann compacte connexe S , il existe une triangulation finie $j_\alpha : T \rightarrow S$ de telle sorte que pour tout α on ait $j_\alpha(T) \subset U_i$ pour au moins un indice i .*

REMARQUE 2.10. C'est un fait remarquable que toute surface de Riemann connexe (compacte ou non) admet un recouvrement dénombrable par des triangles. Ce résultat profond résulte de l'existence de fonction méromorphe non constante sur toute surface de Riemann.

En particulier donnons-nous un atlas holomorphe $\{(U_i, \varphi_i)\}$ sur S de telle sorte que $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}$ soit un biholomorphisme. Pour chaque triangle $j_\alpha : T \rightarrow U_i$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.9. Nous renvoyons à la discussion contenue dans le forum

<http://mathoverflow.net/questions/17578/triangulating-surfaces>

pour une liste de références variées sur la démonstration de ce théorème difficile dans le cas des surfaces topologiques (sans structure différentiable ou de surface de Riemann).

Une démonstration pour les surfaces lisses utilisant la théorie de Morse est donnée dans une note de Hatcher accessible ici : <http://arxiv.org/pdf/1312.3518.pdf> (voir "proof of Fact 2"). Une autre démonstration dans ce même cadre et utilisant les principes de bases de géométrie riemannienne est donnée dans [Jo, Theorem 2.3.A.1]. Le cas topologique est traité dans un article de Carsten Thomannsen. La démonstration contenue dans [Re] utilise implicitement le théorème de Jordan sans y faire explicitement référence. Nous la reprenons ici en utilisant fortement le fait que l'on travaille avec des surfaces de Riemann.

On recouvre S par un nombre finie de cartes holomorphes $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ de telle sorte que $\varphi_i(U_i)$ contiennent $\mathbb{D}(0, 2)$ et $V_i := \varphi_i^{-1}(\mathbb{D}(0, 1))$ forme un recouvrement ouvert de S . On note $\gamma_i = \partial V_i$: c'est un lacet fermé simple, i.e. un plongement du cercle S^1 dans la surface S . Notons que l'on peut toujours supposer que $V_i \not\subset V_j$ pour tout $i \neq j$.

Fait : pour toute paire d'indices $i \neq j$, l'intersection $\gamma_i \cap \gamma_j$ est fini et quitte à composer chaque φ_i par une petite translation ces intersections sont de plus transverses.

Pour voir cela on se place dans la carte U_i contenant V_i , et on considère un point d'intersection $p \in \gamma_i \cap \gamma_j$. On compose φ_i par une transformation de Möbius h qui envoie $\mathbb{D}(0, 1)$ sur \mathbb{H} et p sur le point 0 (et donc le bord γ_i sur l'axe réel).

Dans cette nouvelle carte $h \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}$, le bord γ_j est donné par une équation du type $|\psi(z)| = 1$ pour une certaine fonction holomorphe ψ définie au voisinage de 0 et vérifiant $|\psi(0)| = 1$ (en fait ψ est la composée de l'application de recollement φ_{ij} avec h). L'intersection entre γ_i et γ_j est donc donnée par les équations $\Re(z) = 0$, et $\Re(\log \psi) = 0$. On développe alors en séries entières la fonction $\log \psi(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k$, avec $a_k \in \mathbb{C}$, on écrit $z = x + iy$, et on remarque que l'on peut encore écrire $\Re(\log \psi)(x) = \sum_{k \geq 1} b_k x^k$ pour des coefficients b_k réels. On a donc deux possibilités : soit $\Re(\log \psi)$ possède un zéro isolé en 0 et donc $\gamma_i \cap \gamma_j$ se réduit à un unique point p dans son voisinage ; soit $\Re(\log \psi)$ est identiquement nulle et $\gamma_i = \gamma_j$ dans un voisinage de p . En d'autres termes $\gamma_i \cap \gamma_j$ est soit discret soit localement ouvert, ce qui implique par connexité que soit $\gamma_i \cap \gamma_j$ est fini soit $\gamma_i = \gamma_j$. Pour éviter le second cas, il suffit de composer φ_i et φ_j par des homothéties de rapport très proche de 1.

La transversalité entre γ_i et γ_j est vérifiée lorsque $\Re(\log \psi)(x) = \sum_{k \geq 1} b_k x^k$ avec $b_1 \neq 0$. Si cette condition n'est pas réalisée, on compose la carte $h \circ \varphi_i$ avec une petite translation $z \mapsto z - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. On note k le plus petit entier tel que $b_k \neq 0$. L'intersection entre γ_i et γ_j est alors donnée par une équation du type $\Re(\log \psi)(x) = \epsilon$ qui possède exactement k solutions simples dans un petit voisinage de 0 donné indépendant du choix de ϵ .

Supposons tout d'abord qu'il existe deux indices distincts pour lesquels $\gamma_i \subset V_j$. Le théorème de Jordan différentiable (qui est nettement plus simple que son analogue topologique) montre que $V_j \setminus \gamma_i$ se décompose en un disque ouvert dont le bord est γ_i et un anneau A dont le bord est $\gamma_j \cup \gamma_i$. Comme V_i n'est pas inclus dans V_j il contient nécessairement A et par suite γ_j .

Il s'ensuit que S est contenue dans $V_i \cup V_j$: en effet tout chemin de S partant de V_i est dans cette union. On peut montrer que S est alors la sphère S^2 . Sinon on ajoute un troisième ouvert V_l non inclus dans $V_i \cup V_j$ et dont le bord intersecte transversalement γ_i et γ_j .

On peut donc supposer qu'aucun lacet γ_i n'est inclus dans un ouvert V_j . On va montrer que chaque composante connexe P de $S \setminus \cup_i \gamma_i$ est un disque dont l'adhérence intersecte au moins deux lacets distincts γ_i et γ_j . On peut alors le subdiviser en prenant un point dans P et en le joignant à tous les sommets appartenant à son bord.

Pour comprendre la structure de P on peut procéder comme suit. Soient V_1, \dots, V_k l'ensemble des ouverts de cartes contenant P . Comme $V_i \not\subset V_j$ pour toute paire d'indices, on a nécessairement $k \geq 2$. On montre par récurrence que pour tout $l \geq 2$ la composante connexe de $V_1 \cap \dots \cap V_l$ contenant P est un disque dont l'adhérence intersecte au moins deux lacets distincts.

Dans le cas $l = 2$, on procède comme suit. Comme γ_2 n'est pas complètement inclus dans V_1 par la première étape, le lacet γ_2 possède un nombre fini d'arcs I_1, \dots, I_m inclus dans V_1 , chaque arc ayant ses deux points extrémaux dans γ_1 . Le complémentaire $V_1 \setminus I_1$ est une union de deux disques dont les bords intersectent chacun γ_1 et γ_2 . Pour voir celà, on remarque tout d'abord que I_1 ne peut intersecter

γ_1 en un unique point car l'intersection est transverse par construction. Donc I_1 intersecte γ_1 en deux points distincts. On peut alors épaissir légèrement V_1 en un ouvert V'_1 pour qu'il contienne l'arc J de γ_1 compris entre ces deux points et appliquer le théorème de Jordan différentiable à $J \cup I_1$ dans V'_1 .

On continue ainsi en considérant W_1 la composante de $V_1 \setminus I_1$ contenant P , et en regardant $W_1 \setminus I_2$. Comme γ_2 est un plongement du cercle, I_2 n'intersecte pas I_1 , et donc $W_1 \setminus I_2$ est à nouveau une union de deux disques dont les bords intersectent les deux lactets γ_1 et γ_2 . On conclut finalement que toute composante de $V_1 \setminus \gamma_2$ est un disque dont le bord intersecte γ_1 et γ_2 .

Le même argument s'applique alors au cas $l \geq 3$. □

REMARQUE 2.11. La démonstration donne en réalité une triangulation avec des propriétés plus fortes. La restriction de j_α à chaque coté du triangle est réelle analytique au sens suivant. Si $s \in [0, 1]$ est un paramètre affine d'un tel coté, alors dans chaque carte $\varphi_i \circ j_\alpha(s)$ est développable en séries entières au voisinage de tout point. Une telle triangulation sera dite *analytique*.

2.5. Démonstration du Théorème 1.1. La démonstration est exactement celle de [Re, Théorème 2.3]. En voici les étapes principales.

1. On fixe une triangulation analytique \mathcal{T} de S telle que chaque triangle soit inclus dans une carte holomorphe. Quitte à subdiviser chaque triangle (voir par exemple la Figure 9) on peut même supposer que deux triangles qui possèdent un coté commun sont inclus dans une carte holomorphe.

On numérote les triangles T_1, T_2, \dots de telle sorte que pour tout $i \geq 2$ le triangle T_i possède une arête commune avec au moins un triangle T_1, \dots, T_{i-1} . Pour ce faire on procède par récurrence. On choisit T_1 au hasard. Supposons que T_1, \dots, T_i soient choisis avec la propriété indiquée. Supposons qu'il n'existe aucun triangle ayant une arête commune avec T_1, \dots, T_i , et regardons $K := T_1 \cup \dots \cup T_i$: c'est un compact de S . Montrons qu'il est de plus ouvert. Si $x \in K$ est dans une face de l'un des triangles alors K contient un voisinage de x . Si $x \in K$ est dans une arête de l'un des triangles T_j pour $j \leq i$, le Lemme 2.8 (2) indique qu'il appartient nécessairement à un autre triangle ayant une arête commune avec T_j et donc ce triangle est dans K par hypothèse. Cela démontre à nouveau que T contient un voisinage de x . Finalement, si x est un sommet de l'un des triangles, on applique le Lemme 2.8 (3), et on voit à nouveau que si aucun triangle de \mathcal{T} n'a d'arête commune avec T_1, \dots, T_i alors tous les triangles contenant x sont dans K , et ce dernier contient un voisinage de x . Finalement K est ouvert et fermé et donc égal à S .

Une fois la numérotation choisie, on fixe un triangle euclidien mais non nécessairement équilatéral du plan \mathbb{R}^2 . Ensuite on procède par récurrence et on ajoute un triangle euclidien \hat{T}_{i+1} en le collant à l'une des arêtes de \hat{T}_j pour $j \leq i$ dès lors que T_{i+1} possède une arête commune avec T_j . On réalise ce collage en respectant éventuellement les sommets communs à plusieurs triangles.

On obtient finalement une représentation de S comme un polygône P (éventuellement non convexe) dont les arêtes sont recollées par paire.

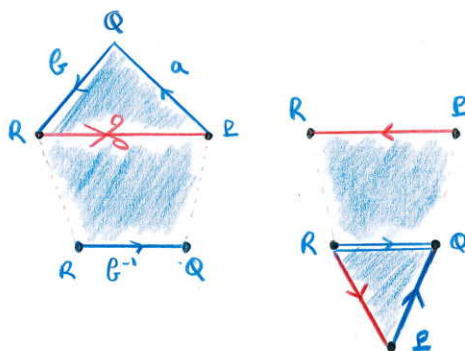
2. On s'arrange pour que chaque triangle $j_\alpha : T \rightarrow S$ soit munie d'une orientation compatible avec celle de S quitte à remplacer j_α par $j_\alpha(e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z})$. En d'autres termes on impose que l'indice $i(\alpha)$ du bord de T par rapport à son centre soit égal à $+1$. Rappelons que cet indice est calculé comme une intégrale (dans une carte (U, φ) contenant $j_\alpha(T)$). Comme j_α est réel-analytique, elle est en particulier différentiable, et on peut définir

$$i(\alpha) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\varphi \circ j_\alpha(\partial T)} \frac{dz}{z - \varphi \circ j_\alpha\left(\frac{1}{3}(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1)\right)}.$$

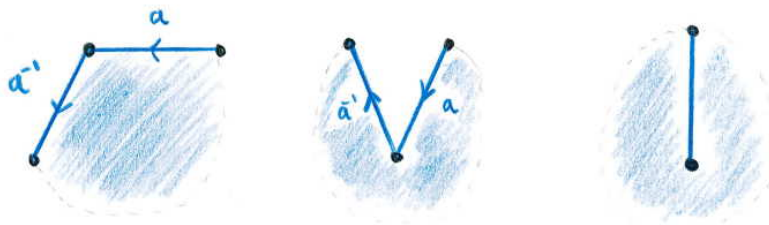
Cette définition ne dépend pas du choix de la carte holomorphe.

Le bord du polygône possède une orientation héritée de celle des triangles et lorsque l'on parcourt le bord de P , on labellise les cotés par des lettres $abc\dots$, en notant par la même lettre des cotés que l'on doit identifier. Du fait qu'un coté apparaît uniquement comme bord de deux triangles, une lettre apparaît exactement deux fois. En tenant compte de l'orientation, elle doit apparaître avec un signe opposé par le Lemme 2.8 (3).

3. On modifie le polygône pour que l'image des sommets des cotés soit tous identifiés dans S . Pour cela, on répète l'opération ci-dessous : celle-ci réduit en effet le nombre de sommets Q d'une unité et augmente le nombre de sommets P d'une.



Si on ne peut répéter cette opération, alors il existe un sommet Q qui est l'intersection de deux cotés a, a^{-1} consécutifs, et on identifie ces deux cotés adjacents comme ci-dessous.



Il se peut que l'on arrive à une situation où il ne reste plus que deux cotés et deux sommets. Dans ce cas, les deux sommets sont nécessairement distincts et l'on

obtient alors une sphère. Dans la suite que l'on obtient après un polygône dont les sommets sont identifiés à un unique point dans S .

4. On montre que tout coté a est nécessairement enchainée à au moins un autre coté. Celà veut dire qu'ils apparaissent dans l'ordre $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$.

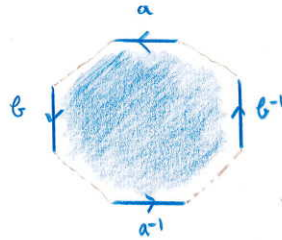


FIGURE 7. Cotés enchainés

On procède pour celà par contradiction, voir la figure ci dessous. On suppose donc que a n'est enchainé à aucun autre coté. On trace un segment reliant le milieu de a au milieu de a^{-1} (en rouge sur la figure). On obtient deux composantes connexes \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , et un coté (différent de a) ne peut apparaitre dans le bord que d'une seule de ces deux composantes. Le point essentiel est que le voisinage de chaque cercle indiqué en marron sur le dessin est homéomorphe à un anneau.

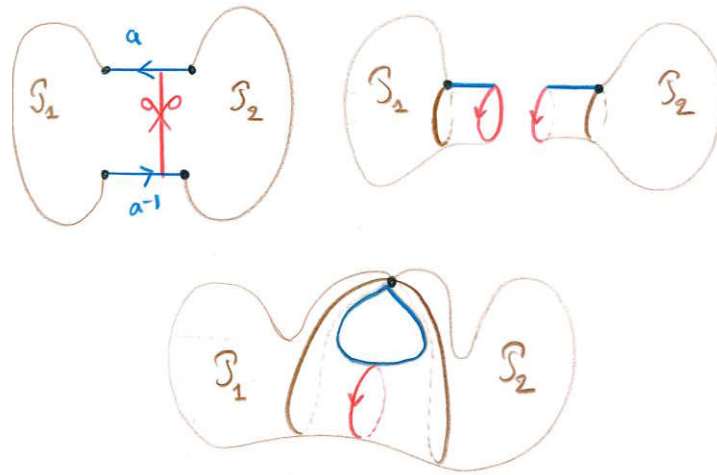
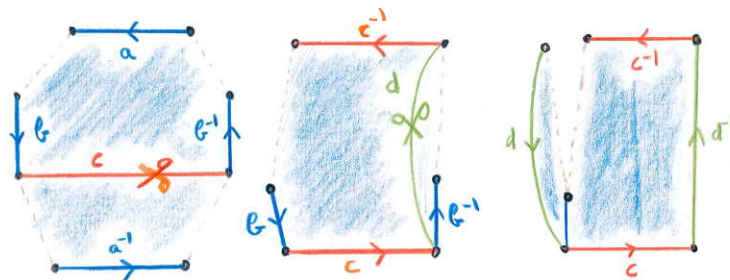


FIGURE 8. Pourquoi un coté est nécessairement enchainé à un autre !

5. Pour chaque paire a, b , on modifie le polygône pour qu'ils apparaissent sous la forme $\dots aba^{-1}b^{-1} \dots$



2.6. Le théorème de Riemann-Hurwitz.

THÉORÈME 2.12. *Soit S une surface de Riemann compacte, et $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux triangulations de S . Notons A, F et V les nombres d'arêtes, de faces et de sommets de \mathcal{T} , et A', F' et V' ces mêmes nombres pour \mathcal{T}' .*

Alors on a $V - A + F = V' - A' + F'$.

DÉMONSTRATION.

Étape 1. Soit \mathcal{T} une triangulation d'un polygone P du plan, et A, F et V les nombres d'arêtes, de faces et de sommets de \mathcal{T} . Alors on a $V - A + F = 1$.

Pour voir cela on procède par récurrence sur F . Si \mathcal{T} contient un unique triangle, alors P est lui-même un triangle, et on a $F = 1$, $V = 3$ et $A = 3$ et le résultat est clair. Sinon on choisit un triangle $j_\alpha : T \rightarrow P$ ayant une arête incluse dans le bord de P , et on l'efface. Comme $F \geq 2$, on obtient alors un nouveau polygone (non vide) muni d'une triangulation ayant $F - 1$ faces, $A - 1$ arêtes, et V sommets si $j_\alpha(T)$ possède une unique arête dans le bord de P ; et ayant $F - 1$ faces, $A - 2$ arêtes, et $V - 1$ sommets si $j_\alpha(T)$ possède deux arêtes dans le bord de P . Dans les deux cas le nombre $V - A + F$ reste inchangé.

Étape 2. On suppose que \mathcal{T} est une triangulation qui raffine \mathcal{T}' au sens suivant. On dira tout d'abord qu'un triangle $j_\alpha : T \rightarrow S$ est plus fin qu'un autre $j_\beta : T \rightarrow S$, si $j_\alpha(T) \subset j_\beta(T)$; et si l'image de chaque arête privé des sommets est inclus soit dans l'intérieur de $j_\beta(T)$ soit dans le bord de $j_\beta(T)$ privé de ses sommets. Une triangulation \mathcal{T} raffine alors \mathcal{T}' si pour tout triangle $j_\alpha : T \rightarrow S$ il existe un triangle $k_\beta : T \rightarrow S$ de \mathcal{T}' qui lui est plus fin.

On va montrer dans ce cas que $V - A + F = V' - A' + F'$. Pour chaque arête a de \mathcal{T}' on compte $A(a)$ le nombre d'arêtes de \mathcal{T} incluses dans a , et $V(a)$ le nombre de sommets de \mathcal{T} inclus dans a . De même, pour chaque face f de \mathcal{T}' on dénote par $F(f)$, $A(f)$ et $V(f)$ le nombre de faces, d'arêtes, et de sommets de \mathcal{T} inclus dans f . On a alors $A' = \sum_a (V(a) - A(a))$, et $F' = \sum_f F(f) - A(f) + V(f)$ par l'étape précédente.

Chaque face de \mathcal{T} est incluse dans une unique face de \mathcal{T}' et apparaît donc une unique fois dans le calcul de F' . Pour les arêtes et les sommets de \mathcal{T} qui sont inclus dans une unique face de \mathcal{T}' , c'est la même chose. Chaque arête de \mathcal{T} incluse dans une arête de \mathcal{T}' est comptée deux fois dans le calcul de F' , et à nouveau une fois dans le calcul de A' . Donc le calcul de $F' - A'$ fait apparaître cette arête exactement une

fois avec un signe négatif. Le même argument fonctionne pour les sommets de \mathcal{T} qui ne sont pas des sommets de \mathcal{T}' . Enfin pour un sommet commun à \mathcal{T} et à \mathcal{T}' , qui est inclus dans k arêtes (et donc dans k faces par le Lemme 2.8), alors sa contribution dans le calcul de $F' - A'$ est nulle.

Finalement, on obtient $F' - A' = F - A + S - S'$ ce qu'il fallait démontrer.

Étape 3. Étant donnée une triangulation \mathcal{T} , on construit une triangulation analytique \mathcal{T}' telle que $F' - A' + S' = F - A + S$. Pour ce faire, on construit pour chaque entier n une triangulation \mathcal{T}_n du triangle équilatéral T elle-même par des triangles équilatéraux (voir la figure).

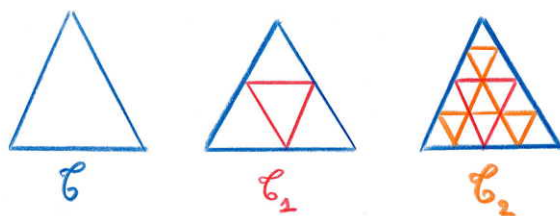


FIGURE 9. Comment subdiviser un triangle ?

En remplaçant chaque triangle de \mathcal{T} par une triangulation \mathcal{T}_n assez fine, on peut supposer que tous les triangles possédant un sommet commun sont inclus dans une même carte analytique. La nouvelle triangulation possède une quantité $F - A + S$ identique par l'étape 2.

On considère à présent une arête a et on fixe une carte (U, φ) qui contient les deux triangles qui contiennent a . L'union de ces triangles est un compact simplement connexe de U et il existe donc un biholomorphisme $h : V \rightarrow \mathbb{D}$ de son intérieur V vers le disque unité, voir [Ru, Theorem 14.3]. Ce biholomorphisme s'étend continûment en un homéomorphisme $\bar{h} : \bar{V} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ par [Ru, Theorem 14.18]. On modifie alors l'arête a en la remplaçant par la préimage par \bar{h} du rayon joignant $\bar{h}(p)$ à $\bar{h}(p')$ dans $\bar{\mathbb{D}}$. On répète alors cette opération pour toutes les arêtes de \mathcal{T} et on obtient une triangulation dont toutes les arêtes sont analytiques sauf en leurs extrémités.

On va maintenant modifier les arêtes au voisinage de chaque sommet pour les rendre aussi réelle-analytique. On fixe $1 > \epsilon > 0$ arbitraire. Soit p un sommet de la triangulation. Comme précédemment il existe un homéomorphisme $\bar{h} : \bar{V} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ où \bar{V} désigne l'union de tous les triangles qui contiennent p . Les sommets de \mathcal{T} contenus dans \bar{V} et différents de p sont envoyés sur le cercle par \bar{h} , et on peut donc les ordonner cycliquement p_1, \dots, p_k . L'arête joignant p_i à p est donnée par un chemin $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \bar{V}$ qui est injectif et réel analytique sur $(0, 1)$. Soit t_i l'infimum des $t > 0$ tel que $\gamma_i(t_i)$ soit sur le cercle $\bar{h}^{-1}(S(0, \epsilon))$. On remplace alors γ_i par le chemin $\tilde{\gamma}_i$ qui coïncide avec γ_i sur $[0, t_i]$ et tel que $t \in [t_i, 1] \mapsto \bar{h}(\tilde{\gamma}_i(t))$ est linéaire. On obtient ainsi une collection $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ de chemins disjoints réels-analytique par morceaux sur V . Leur complémentaire dans \bar{V} possède k composantes connexes, chacune contenant

exactly trois sommets de \mathcal{T} de la forme p, p_i, p_{i+1} , et on obtient donc une nouvelle triangulation $\tilde{\mathcal{T}}$ ayant le même nombre d'arête, de sommets et de face que \mathcal{T} .

On modifie successivement la triangulation en opérant cette transformation en chaque sommet, et on obtient finalement la triangulation analytique désirée (en fait la triangulation est analytique par morceaux, mais cela ne change pas la suite de l'argument).

Étape 4. Étant données deux triangulations analytiques \mathcal{T} et \mathcal{T}' , on en construit une troisième \mathcal{T}'' qui raffine à la fois \mathcal{T} et \mathcal{T}' .

Le point est de voir que le complémentaire de l'union de toutes les arêtes de ces deux triangulations est une union finie de polygones à bord réel-analytique. On obtient \mathcal{T}'' en choisissant un point dans chacun de ces polygones et en le joignant à toutes les intersections entre arêtes contenues dans son bord.

La démonstration est identique à celle du Théorème 2.9 : on ajoute une après l'autre les arêtes de \mathcal{T}' et on montre par récurrence sur le nombre d'arêtes ajoutées que chaque composante connexe du complémentaire est bien de la forme voulue.

Fin de la démonstration. On part de deux triangulations quelconques \mathcal{T} et \mathcal{T}' . On applique l'étape 3 à chacune d'entre elles : on peut donc les supposer analytiques sans changer les valeurs de $F' - A' + S'$ et de $F - A + S$. Ensuite on applique l'étape 4 pour obtenir une triangulation \mathcal{T}'' qui raffine les deux triangulations de départ. L'étape 2 permet alors de conclure que $F' - A' + S' = F'' - A'' + S'' = F - A + S$ ce qu'il fallait démontrer. \square

DÉFINITION. On note $\chi(S)$ le nombre $S - A + F$ calculé pour n'importe quelle triangulation de S , et on l'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface.

Dans le cas de M_g , on peut construire une triangulation en prenant un point dans le polygone et en traçant des rayons vers chaque sommet de P , ainsi que vers chaque milieu des segments bordant le polygone. Cette triangulation possède $2 + 2g$ sommets, $8g$ faces et $8g + 4g$ arêtes.

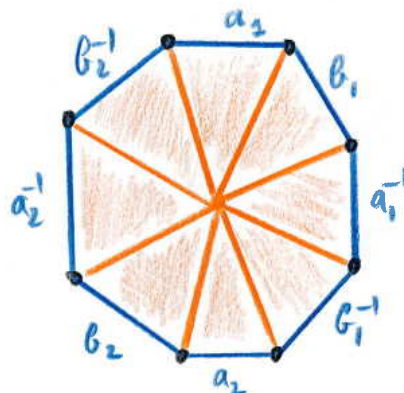
COROLLAIRE 2.13. *Pour S une surface de Riemann compacte de genre g , on a*

$$\chi(S) = 2 - 2g .$$

Rappelons qu'une courbe fermée simple dans une surface S est un plongement du cercle au sens des variétés différentiables (c'est-à-dire une immersion injective $S^1 \rightarrow S$).

REMARQUE 2.14. On peut démontrer que le genre d'une surface de Riemann compacte connexe est le nombre maximal de courbes fermées simples disjointes c_1, \dots, c_q ne disconnectant pas S , i.e. telles que $S \setminus \{c_1, \dots, c_q\}$ reste connexe, voir [Re, Proposition 2.3].

La caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant très important dans l'étude des applications holomorphes entre surfaces de Riemann comme le montre la formule suivante.

FIGURE 10. Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré dans le cas $g = 2$

Rappelons le théorème de structure locale des applications holomorphes. Si $f : S' \rightarrow S$ est une application holomorphe non constante et p est un point de S' alors il existe deux cartes (U, φ) et (V, ψ) centrées en p et $f(p)$ respectivement, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$ pour un entier $k \geq 1$. On vérifie que cet entier ne dépend pas du choix des cartes φ et ψ , et on le note $\text{ord}_p(f)$: c'est l'ordre de ramification de f en p .

THÉORÈME 2.15 (Formule de Riemann-Hurwitz). *Soit $f : S' \rightarrow S$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes connexes.*

- (1) La fonction $q \mapsto \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{ord}_p(f)$ est constante égale à un entier $d \geq 1$.
- (2) L'ensemble des points $p \in S'$ où $\text{ord}_p(f) \geq 2$ est fini.
- (3) On a l'égalité

$$(2.1) \quad \chi(S') = d \times \chi(S) + \sum_{p \in S'} (1 - \text{ord}_p(f)) .$$

INDICATION DE DÉMONSTRATION. Rappelons que le Théorème 2.4 de structure locale des applications holomorphe indique que dans des cartes adéquates f peut toujours s'écrire sous la forme $z \mapsto z^k$. L'ensemble des points de ramification R_f de f est donc isolé ce qui implique le deuxième point. L'ensemble de ses images $f(R_f)$ reste donc fini, et l'application $f : S' \setminus f^{-1}(f(R_f)) \rightarrow S \setminus f(R_f)$ est un revêtement fini de degré disons $d \geq 1$. Le théorème de structure locale implique alors le premier point.

Pour le troisième point, on fixe une triangulation analytique \mathcal{T} de S de telle sorte que $f(R_f)$ soit inclus dans l'ensemble des sommets de \mathcal{T} . On relève ensuite cette triangulation à S' de la manière suivante. On montre que chaque triangle $j_\alpha : T \rightarrow S$ se relève à S' en d triangles. Pour ceux dont l'adhérence est incluse dans le complémentaire de $f(R_f)$ il suffit d'appliquer le théorème de relèvement. Pour un triangle dont un (ou plusieurs) des sommets sont dans $f(R_f)$ on peut tout de même

relever à S' la restriction de j_α au complémentaire des trois sommets dans T . On montre alors que l'on peut étendre ce relevé aux sommets, et que l'on obtient encore un triangle dans S' (voir [DD, §6.5.4]).

Enfin on procède à un décompte des faces F' , des arêtes A' et des sommets V' de la triangulation de S' que l'on a construite. Chaque face et chaque arête de \mathcal{T} se relève en exactement d faces et d arêtes dans la triangulation de S' donc $A' = d \times A$ et $F' = d \times F$. Enfin, pour chaque sommet q de \mathcal{T} ayant k préimages, on a bien sûr $d = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{ord}_p(f) = k + \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{ord}_p(f) - 1)$ et donc $V' = d \times V + \sum_{p \in S'} (\text{ord}_p(f) - 1)$.

La formule (2.1) s'ensuit. \square

3. Construction de surfaces de Riemann compactes

Jusqu'à présent nous avons vu uniquement deux types de surfaces de Riemann compactes : la sphère de Riemann (de genre 0), et les courbes elliptiques (de genre 1). Nous nous proposons dans cette section de construire des surfaces de Riemann compactes de genre quelconque.

3.1. Surface de Riemann compacte associée à un polynôme à deux variables. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{C}[x, y]$ non constant tel que les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ ne s'annulent pas simultanément sur $C := \{P = 0\}$. Rappelons que C porte alors une structure de surface de Riemann telle que les deux projections sont holomorphes (voir §2.5).

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. *Il existe une surface de Riemann compacte $S(P)$ et une application holomorphe $\iota : C \rightarrow S(P)$ injective telle que $S(P) \setminus \iota(C)$ est un ensemble fini.*

Au lieu de démontrer ce résultat dans toute sa généralité, nous allons expliciter la construction de $S(P)$ dans un exemple particulier. On fixe deux entiers $k \geq 2$ et $l \geq 2$ premiers entre eux, l nombres complexes distincts x_1, \dots, x_l , on pose

$$P(x, y) = y^k - (x - x_1) \cdots (x - x_l) .$$

On note $C := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = 0\}$, et $\pi(x, y) = x$ la première projection.

1. L'ensemble C porte une structure de surface de Riemann telle que les deux projections (et donc π) sont holomorphes.

Si (x, y) est un point de C en lequel $\frac{\partial P}{\partial y}$ s'annule, alors on $y = 0$, et donc $x \in \{x_1, \dots, x_l\}$. Si on note $Q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_l)$, on obtient $\frac{\partial P}{\partial x}(0, x_i) = Q'(x_i)$ qui est non nulle car les x_i sont distincts deux à deux. On peut donc bien appliquer la Proposition 2.13 ce qui montre le résultat.

Observons de plus que la démonstration de cette proposition montre que π est un biholomorphisme local en tout point $(x, y) \in C$ tel que $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq 0$, i.e. dès que $y \neq 0$.

2. L'application $\pi : C \setminus \pi^{-1}\{x_1, \dots, x_l\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ est un revêtement galoisien fini de degré k .

Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$. Alors $\pi^{-1}\{x\}$ est l'ensemble des paires $\{(x, y)\}$ avec $y^k = (x - x_1) \dots (x - x_l) \neq 0$ et est donc de cardinalité exactement k . De plus, π est un biholomorphisme local en chacun des points $(x, y) \in \pi^{-1}\{x\}$ par l'observation précédente. On en déduit donc que π est un revêtement de degré k de $C \setminus \pi^{-1}\{x_1, \dots, x_l\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$.

Il est galoisien car le groupe U_k des racines de l'unité d'ordre k agit sur C de la manière suivante : $\zeta \cdot (x, y) = (x, \zeta y)$, que son action est sans point fixe et qu'elle commute à π (i.e. $\pi(\zeta \cdot (x, y)) = \pi(x, y)$). Il s'ensuit que U_k s'identifie à un sous-groupe du groupe d'automorphisme de revêtement induit par π sur $C \setminus \pi^{-1}\{x_1, \dots, x_l\}$. La fibre au dessus d'un point étant de cardinal k , le groupe U_k agit transitivement sur elle ce qui montre le résultat attendu.

3. On a $\text{ord}_{p_i}(\pi) = k$ pour $p_i = (x_i, 0) \in C$ et tout $i = 1, \dots, l$.

Au point p_i , on a $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \neq 0$, et donc la projection $\varpi(x, y) = y$ est un biholomorphisme local. Plus précisément on peut trouver $\epsilon, \eta > 0$, et une application holomorphe θ définie dans un voisinage de l'origine, telle que $\theta(0) = x_i$ et $\{(x, y) \in C, |x - x_i| < \epsilon\} = \{(\theta(t), t), |t| < \eta\}$. Par définition, $m := \text{ord}_{p_i}(\pi) = \text{ord}_0(\theta)$. Pour calculer ce dernier entier, on écrit $\theta(t) = x_i + \sum_{j \geq m} a_j t^j$ avec $a_m \neq 0$. Pour simplifier les notations, on suppose que $i = 1$. On obtient

$$t^k = (\theta(t) - x_1)(\theta(t) - x_2) \cdots (\theta(t) - x_l) = \\ (a_m t^m + o(t^{m+1})) (x_1 - x_2 + o(1)) \cdots (x_1 - x_l + o(1))$$

et donc $k = m$.

4. Il existe une surface de Riemann compacte $S(P)$ et une application holomorphe injective $\iota : C \rightarrow S(P)$ telle que $S(P) \setminus C$ est un unique point p_∞ . De plus π s'étend en une application holomorphe $S(P) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telle que $\text{ord}_{p_\infty}(\pi) = k$.

On fixe un nombre réel très grand $A > 0$, et on regarde le revêtement induit par π au dessus de $D_A := \{x, |x| > A\}$ c'est-à-dire de $S_A := \{(x, y), |x| > A, P(x, y) = 0\}$ sur D_A .

Faisons le changement de variables $z = \frac{1}{x}$ et $w = \frac{1}{y}$ de telle sorte que S_A est biholomorphe à

$$\left\{ (z, w), 0 < |z| < \frac{1}{A}, z^l = w^k (1 - zx_1) \cdots (1 - zx_l) \right\} .$$

Quitte à prendre A assez grand, par le Théorème 1.5, on peut trouver un biholomorphisme défini dans un voisinage U de l'origine $h : U \rightarrow \{|z| < \frac{1}{A}\}$ tel que $h(z)^l = z^l (1 - zx_1)^{-1} \cdots (1 - zx_l)^{-1}$. En posant le changement de variable $z' = h(z)$, on obtient donc que S_A est biholomorphe à

$$S'_A := \{(z', w), z' \in U \setminus \{0\}, (z')^l = w^k\} .$$

Notons $V = \{t, t^k \in U\}$. C'est un ouvert connexe du plan car U est connexe et contient 0. L'application $t \mapsto t^k$ est alors un revêtement connexe de degré k de $V \setminus \{0\}$ sur $U \setminus \{0\}$. Comme ce dernier est biholomorphe au disque épointé \mathbb{D}^* et que tout revêtement de \mathbb{D}^* est conjugué² à l'application $z \mapsto z^l$ de \mathbb{D}^* sur lui-même pour un entier $l \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $V \setminus \{0\}$ est encore biholomorphe au disque épointé, puis que V est biholomorphe au disque³.

On observe alors que comme k et l sont premiers entre eux, l'application $\psi(t) := (t^k, t^l)$ définit un biholomorphisme de $V \setminus \{0\}$ sur S'_A .

On définit maintenant $S(P)$ comme l'union de S et d'un point p_∞ , que l'on munit de la topologie où les ouverts sont les ouverts de S et les ensembles de la forme $\{p_\infty\} \cup \pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus K)$ avec K compact dans \mathbb{C} . Il est clair que $S(P)$ est un espace compact⁴ Pour cette topologie $S_A \cup \{p_\infty\}$ est un voisinage ouvert contenant $\{\infty\}$, et l'application $t \mapsto (\frac{1}{h^{-1}(t^k)}, \frac{1}{t^l})$ est un homéomorphisme de V sur $S_A \cup \{p_\infty\}$. On note φ son inverse.

Fixons $\{U_i, \varphi_i\}$ un atlas holomorphe de S donné par la Proposition 2.13 de telle sorte que φ_i est soit la première soit la deuxième projection. La famille $\{(S_A \cup \{p_\infty\}, \varphi)\} \cup \mathfrak{A}$ définit un atlas holomorphe sur $S(P)$: en effet les applications de recollement sont de la forme $t \mapsto \varphi^{-1}(t^k)$ ou $t \mapsto t^{-l}$ et sont donc bien holomorphes.

Enfin, l'application π est donnée dans la carte $(S_A \cup \{\infty\}, \varphi)$ par $t \mapsto \varphi^{-1}(t^k) = a_1^{-1}t^k + O(t^{k+1})$ avec $a_1 = \varphi'(0) \neq 0$, et donc $\text{ord}_{p_\infty}(\pi) = k$.

5. Le genre de $S(P)$ est égal à $\frac{1}{2}(l-1)(k-1)$.

Pour calculer le genre g de $S(P)$ on applique la formule de Riemann-Hurwitz à l'application $\pi : S(P) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et on obtient par les points **(3)** et **(4)** ci-dessus $2 - 2g = 2k + (l+1)(1-k)$, ce qui donne bien la formule attendue.

En prenant $l = 2$ et $k = 2g + 1$, la discussion précédente montre que

COROLLAIRE 3.2. *Pour tout $g \geq 2$, il existe une surface de Riemann compacte de genre g .*

3.2. Autres types de construction. Il existe de multiples manières de construire des surfaces de Riemann compactes de genre quelconque, mais aucune ne peut être considérée comme totalement élémentaire. On utilisera dans ce paragraphe librement des notions de géométrie (différentielle ou hyperbolique).

Géométrie riemannienne (voir [Be, lectures 3–5]). On part d'une surface S compacte de classe \mathcal{C}^2 , que l'on suppose orientée, et on fixe une métrique riemannienne g sur S . Un théorème de Gauss montre alors que tout point $p \in S$ admet une carte différentiable (U, φ) telle que φ induit un difféomorphisme de U sur un Ω ouvert de \mathbb{C} et la métrique g s'exprime dans Ω sous la forme $h(z)|dz|^2$ avec h de classe \mathcal{C}^2 et positive.

2. Appliquer la correspondance de Galois et le fait que $\pi_1(\mathbb{D}^*, \bullet) \simeq \mathbb{Z}$.

3. Car toute application holomorphe sur \mathbb{D}^* qui est bornée s'étend holomorphiquement en 0.

4. C'est même le compactifié d'Alexandrov de S .

On montre alors que toute transformation de classe \mathcal{C}^2 qui envoie une métrique $h(z)|dz|^2$ sur une métrique du même type et qui *préserve* l'orientation est holomorphe. Les cartes (U, φ) forment donc bien un atlas holomorphe et munit ainsi S d'une structure de surface de Riemann.

Théorie des groupes (aspect géométrique). L'idée est de construire des sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dont l'espace quotient $S := \mathbb{H}/\Gamma$ est compact. Il existe une construction de nature géométrique due à Poincaré, voir [Hu, §3.9] ou [Bea, §9.8]. L'idée est de partir d'un polygône P dans \mathbb{H} dont les cotés sont des géodésiques pour la métrique hyperbolique de \mathbb{H} (c'est-à-dire des arcs de cercles dont le centre est dans \mathbb{R} ou des droites verticales). On considère alors le sous-groupe des transformations holomorphes obtenues en composant toutes les symétries orthogonales par rapport aux faces de ce polygône. Le Théorème de Poincaré donne des conditions suffisantes pour que les polygônes $\{g \cdot P\}_{g \in G}$ pavent l'espace \mathbb{H} , et que le quotient de \mathbb{H} par l'action de G est bien une surface de Riemann compacte. On peut par exemple prendre un triangle dont les angles sont respectivement égaux à $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$ pour $p, q, r \geq 2$ de telle sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Une étude très détaillée du théorème de Poincaré est décrite dans [Mas, §IV.H].

Théorie des groupes (aspect arithmétique). On peut aussi construire des sous-groupes discrets G de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tels que \mathbb{H}/G soit compact en utilisant des techniques arithmétiques, voir par exemple [Mac].

Combinatoire (voir [Re, Théorème 2.2]). On part d'une décomposition de M_g en polygônes réguliers à $k \geq 3$ cotés (par exemple en triangles ou en carrés), et on construit des cartes holomorphes à l'aide de ceux-ci. Un soin particulier doit être porté aux cartes contenant les sommets de la polygonation.

4. Formes différentielles holomorphes

Nous allons maintenant indiquer un lien profond entre le notion de genre que nous avons introduit précédemment de manière purement topologique et des objets de nature holomorphe sur une surface de Riemann.

4.1. Formes méromorphes. Soit S une surface de Riemann, et $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas holomorphe. Une 1-forme méromorphe (resp. holomorphe) ω est la donnée pour chaque carte U_i d'une fonction f_i méromorphe (resp. holomorphe) telle que $f_j(z) = \varphi'_{ji}(z)f_i(z)$ pour tout $z \in \varphi_i(U_i)$ avec $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$.

Pour un point $p \in S$ notons $z_i = \varphi_i(p)$ de telle sorte que $\varphi_{ji}(z_i) = z_j$. Dans une carte holomorphe, on note $\omega = f_i dz_i$. Avec ces notations les conditions de recollement correspondent à la formule de transformation $dz_j = \varphi'_{ij} dz_i$.

Soit $g : S' \rightarrow S$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann connexes et ω une 1-forme méromorphe (resp. holomorphe). On choisit des atlas holomorphes (U, φ) de S' et (V, ψ) de S de telle sorte que la préimage de toute carte V de S par g est incluse dans une carte U de S' . Si $\omega = f(z)dz$ dans V , on

pose $g^*\omega := f \circ g(z) g'(z) dz$ dans U et on vérifie que ces données définissent bien encore une 1-forme méromorphe (resp. holomorphe).

EXEMPLE 4.1. La différentielle df d'une fonction méromorphe (resp. holomorphe) $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ est une 1-forme méromorphe (holomorphe). Pour toute fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ la forme $\frac{P(z)}{Q(z)} dz$ est une 1-forme méromorphe sur la sphère de Riemann.

4.2. Intégration des formes holomorphes. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ un chemin différentiable par morceaux dont l'image est incluse dans une carte (U, φ) , et ω une forme différentielle holomorphe. On peut alors définir $\int_\gamma \omega$ en écrivant $\omega|_U = f(z) dz$ et en posant $\int_\gamma \omega = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$. Cette définition ne dépend pas du choix de la carte, et on a $\int_{\gamma' \cdot \gamma} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{\gamma'} \omega$.

On définit ensuite la quantité $\int_\gamma \omega$ pour *tout* chemin différentiable par morceaux en découpant le chemin de telle sorte que chaque morceau soit inclus dans une carte et en sommant les quantités obtenues.

REMARQUE 4.1. Sur le disque unité toute forme holomorphe ω s'écrit comme $\omega = df$ pour une fonction holomorphe comme on le voit en posant $f(z) = \int_{[0, z]} \omega$. Le fait que la définition de f ne dépende pas du chemin joignant 0 à z est une conséquence du théorème de Cauchy.

4.3. Opérations sur les formes méromorphes. Soient ω et ω' deux formes méromorphes sur une surface de Riemann S connexe. On peut alors définir leur somme $\omega + \omega'$ en posant $(\omega + \omega')|_U := \omega|_U + \omega'|_U$ dans toute carte.

On peut aussi définir le *quotient* de deux 1-formes méromorphes ω, ω' au moins lorsque l'une d'entre elles ne s'annule pas identiquement. En effet fixons une carte U_i et écrivons $\omega|_{U_i} = f_i dz_i$, $\omega'|_{U_i} = g_i dz_i$, et posons $h_i := \frac{\omega}{\omega'} := \frac{f_i}{g_i}$. C'est une fonction méromorphe définie sur U_i . Comme les formules de transformations d'une carte U_i à une carte U_j s'écrivent $f_i = \varphi'_{ij} f_j$, $g_i = \varphi'_{ij} g_j$, on obtient que $h_i = h_j$ sur l'intersection $U_i \cap U_j$, et par suite que $\frac{\omega}{\omega'}$ est bien définie comme fonction méromorphe sur la surface S tout entière.

On peut définir l'*ordre* d'une 1-forme méromorphe ω en un point p . Pour cela on fixe une carte U centrée en p , on écrit $\omega|_U = f(z) dz$ et on pose $\text{ord}_p(\omega) := \text{ord}_0(f) \in \mathbb{Z}$. Une forme ω est donc holomorphe au voisinage p si et seulement si $\text{ord}_p(\omega) \geq 0$, et cette forme s'annule en p dès que $\text{ord}_p(\omega) > 0$.

THÉORÈME 4.2. *Soit ω une 1-forme méromorphe non nulle définie sur une surface de Riemann S compacte et connexe. Alors on a*

$$\sum_{p \in S} \text{ord}_p(\omega) = 2g - 2 .$$

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. La démonstration se fait en deux temps. Tout d'abord on montre que la quantité $\sum_{p \in S} \text{ord}_p(\omega)$ ne dépend pas du choix de la

1-forme méromorphe. En effet, si ω et ω' sont deux telles formes, alors il existe une fonction méromorphe f sur S telle que $\omega = f\omega'$ et on a donc

$$\sum_{p \in S} \text{ord}_p(\omega) = \sum_{p \in S} \text{ord}_p(\omega') + \sum_{p \in S} \nu_p(f) ,$$

où $\nu_p(f) = \text{ord}_p(f)$ aux points $p \in f^{-1}(0)$, $\nu_p(f) = -\text{ord}_p(f)$ aux points $p \in f^{-1}(\infty)$. Le Théorème 2.15 (1) montre que la somme $\nu_p(f)$ est nulle d'où le résultat.

Dans un deuxième temps, on choisit une fonction méromorphe non constante f sur S , et on pose $\omega = f^*(dz)$. Si $p \in S$ ne se projette pas sur l'infini, un calcul rapide montre que $\text{ord}_p(\omega) = \text{ord}_p(f) - 1$. Dans la carte $w = \frac{1}{z}$ au voisinage de l'infini, on peut écrire $dz = \frac{-dw}{w^2}$, et lorsque $f(p) = \infty$, on a donc $\text{ord}_p(\omega) = -\text{ord}_p(f) - 1$. La formule de Riemann-Hurwitz appliquée à f implique donc

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= 2 \sum_{f^{-1}(\infty)} \text{ord}_p(f) + \sum_{p \in S} (1 - \text{ord}_p(f)) \\ &= \sum_{f^{-1}(\infty)} (1 + \text{ord}_p(f)) + \sum_{p \notin f^{-1}(\infty)} -\text{ord}_p(\omega) = - \sum_{p \in S} \text{ord}_p(\omega) \end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat attendu. \square

REMARQUE 4.3. La démonstration ci-dessus repose de manière essentielle sur l'existence d'une fonction méromorphe non constante sur S , ce qui est un résultat tout à fait non trivial. Lorsque la surface est associée à un polynôme à deux variables comme à la Section 3.1, ce fait est cependant immédiat.

4.4. Genre et formes méromorphes. Le théorème suivant fait partie (comme le théorème d'uniformisation) des résultats les plus profonds de la théorie des surfaces de Riemann.

THÉORÈME 4.4. *Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 0$. Alors la dimension de l'espace vectoriel complexe des 1-formes holomorphes est de dimension g .*

IDÉES DE DÉMONSTRATION. Pour simplifier on notera $H^0(\Omega_S^1)$ l'espace vectoriel (complexe) des 1-formes holomorphes. On va tout d'abord montrer que $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega_S^1) \leq g$. Pour cela, on prends une famille libre (sur \mathbb{C}) de 1-formes holomorphes $\omega_1, \dots, \omega_k$. Remarquons tout d'abord les $2k$ formes réelles $\alpha_i := \Re(\omega_i)$ et $\beta_j := \Im(\omega_i)$ forment une famille libre (sur \mathbb{R}) de 1-forme réelles. Celles-ci sont de plus fermées car toute forme holomorphe est fermée.

On choisit un homéomorphisme de S vers M_g et on note $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ les $2g$ lacets correspondant dans S basés en un point p_0 . On peut les supposer différentiables. Si k est strictement plus grand que g , on peut trouver une combinaison linéaire non-triviale α des $2k$ formes réelles α_i et β_j telle que $\int_{a_i} \alpha = \int_{b_j} \alpha = 0$.

Pour chaque point p choisissons un lacet arbitraire γ partant de p_0 et aboutissant en p , et posons $f(p) := \int_{\gamma} \alpha$. Par Stokes, et comme α est une forme fermée l'intégrale ne dépend pas de la classe d'homotopie de γ . Comme l'intégrale de α le long de tout

lacet formant un système de générateurs du groupe fondamental de S est nulle, on voit que $f(p)$ ne dépend en fait pas du choix de chemin γ . On a de plus $df = \alpha$.

On remarque que α est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe ω . Dans une carte holomorphe nous pouvons donc écrire $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ ce qui implique $\frac{\partial f}{\partial z} dz = \omega$ puis que $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$. En d'autres termes, la fonction f est harmonique. Comme S est compacte, f doit être constante et donc $\alpha = 0$ ce qui est contradictoire.

Le point difficile de la démonstration est la construction de 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann donnée, et cette construction repose sur des techniques d'analyse délicates.

On peut trouver deux méthodes de démonstration.

Formes harmoniques. On munit S d'une métrique riemannienne conforme c'est-à-dire qui s'écrit $h(z)|dz|^2$ dans toute carte holomorphe. Cette donnée permet de définir des opérateurs de type Laplacien sur l'espace des 1-formes réelles et de définir une notion de formes harmoniques. On montre alors que toute 1-forme fermée est cohomologue à une unique forme "harmonique", puis que l'espace réel des 1-formes harmoniques. Le théorème découle alors de deux faits : d'une part la dimension du $H^1(S)$ au sens de la cohomologie de De Rham est égale à $2g$ (ce résultat découle de résultats de comparaison entre théories cohomologiques simpliciale et de De Rham) ; d'autre part la dimension de l'espace des 1-formes harmoniques est le double de la dimension des 1-formes holomorphes.

Une démonstration le long de ces lignes peut être trouvée dans [FK, pp.54–60] et dans [Jo, p.203].

Méthode cohomologique. Cette approche utilise le langage de la théorie des faisceaux et la cohomologie de ces objets. Elle est très largement algébrique et repose sur l'utilisation systématique de suites exactes longues de cohomologie et sur la dualité de Serre. L'analyse intervient cependant de manière cruciale pour démontrer que certains espaces de cohomologie sont de dimension finie. Une démonstration en ce sens est donnée dans [Re, §2–3]. \square

Bibliographie

- [Bea] BEARDON, ALAN F. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1983. xii+337 pp.
- [Be] BERS, LIPMAN. *Riemann surfaces*. Notes by E.Rodlitz and R.Polack Edited by the Courant Institute of Mathematical Sciences New York University. 1957-58. vi+259 pp.
- [FK] FARKAS, HERSHEL M. ; KRA, IRWIN. *Riemann surfaces*. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. xi+337 pp.
- [Ha] HATCHER, ALLEN. *Algebraic topology*. (English summary) Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+544 pp.
- [Hu] HUBBARD, JOHN HAMAL. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1. Teichmüller theory*. With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra. With forewords by William Thurston and Clifford Earle. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. xx+459 pp. ISBN : 978-0-9715766-2-9 ; 0-9715766-2-9
- [Jo] JOST, JÜRGEN. *Compact Riemann Surfaces : An Introduction to Contemporary Mathematics*. Universitext. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 2006.
- [Mac] MACLACHLAN, C. *Introduction to arithmetic Fuchsian groups*. Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups (Madrid, 1998), 29-41, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 287, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001
- [Mas] MASKIT, B. *Kleinian groups*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 287, 1988.
- [Re] REYSSAT, ÉRIC. *Quelques aspects des surfaces de Riemann*. (French) [Some aspects of Riemann surfaces] Progress in Mathematics, 77. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1989. viii+166 pp.
- [Ru] RUDIN, WALTER. *Analyse réelle et complexe*. (French) [Real and complex analysis] Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman. Third printing. Masson, Paris, 1980. x+397 pp.

Exercices

EXERCICE C.1.

- (1) Montrer que si le centre d'un produit libre de deux groupes $G \star H$ est non trivial, alors G ou H est le groupe trivial.
- (2) Montrer que tout élément de $G \star H$ d'ordre fini est un conjugué d'un élément d'ordre fini de G ou de H .

EXERCICE C.2. On fixe quatre entiers n, m, n' et m' et on suppose que $\mathbb{Z}/n \star \mathbb{Z}/m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n' \star \mathbb{Z}/m'$.

- (1) Montrer que $nm = n'm'$.
- (2) Montrer que $\max\{m, n\} = \max\{m', n'\}$, et conclure que $\{n, m\} = \{n', m'\}$.

EXERCICE C.3. Les groupes G suivants sont-ils triviaux ?

- (1) $G := \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$
- (2) $G := \langle a, b | aba^{-1}b^{-2}, bab^{-1}a^{-2} \rangle$
- (3) Soit $w = a^{n_1}b^{n_2} \cdots a^{n_g}$ un mot arbitraire, et $G := \langle a, b | w \rangle$

EXERCICE C.4.

- (1) Calculer le groupe fondamental d'un bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$.
- (2) Calculer le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles.

EXERCICE C.5.

- (1) Calculer le groupe fondamental du complémentaire d'un nombre fini de points dans \mathbb{R}^3 .
- (2) Calculer le groupe fondamental du complémentaire de n droites distinctes passant par l'origine dans \mathbb{R}^3 .

EXERCICE C.6.

- (1) Montrer que le sous-groupe G du groupe affine engendré par les applications $a(x, y) = (-x, y + 1)$, et $b(x, y) = (x + 1, y)$ agit proprement discontinument sur le plan sans point fixe et identifier l'espace quotient $K = \mathbb{R}^2/G$.
- (2) Montrer que le groupe fondamental de K possède une présentation sous la forme $\langle a, b, | baba^{-1} \rangle$.
- (3) Calculer l'abélianisé du groupe fondamental de K .

EXERCICE C.7. On considère un plongement du cercle $\varphi : S^1 \rightarrow M$ dans une variété connexe de dimension $m \geq 3$.

- (1) Montrer que $M \setminus \varphi(S^1)$ est connexe.
- (2) Donner une classification des revêtements connexes de \mathbb{R}^m privés d'une droite.

- (3) Soient $E \rightarrow M$ et $E' \rightarrow M$ deux revêtements connexes. Montrer que si leur restriction à $M \setminus \varphi(S^1)$ sont isomorphes, alors E et E' sont isomorphes.
- (4) En déduire que le morphisme induit par l'inclusion $\pi_1(M \setminus \varphi(S^1)) \rightarrow \pi_1(M)$ est surjectif.
- (5) Lorsque $m \geq 4$, montrer que tout revêtement de $M \setminus \varphi(S^1)$ est la restriction d'un revêtement de M .
- (6) En déduire que le morphisme induit par l'inclusion $\pi_1(M \setminus \varphi(S^1)) \rightarrow \pi_1(M)$ est un isomorphisme.

EXERCICE C.8 (Groupe de noeuds).

- (1) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus K$ où K est un cercle plan.
- (2) Calculer le groupe fondamental du $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$ où K_1 et K_2 sont deux cercles disjoints dans un même plan.
- (3) Calculer le groupe fondamental du $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2)$ où K_1 est le cercle $\{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\}$, et $K_2 = \{(0, y, z), z^2 + (y - 1)^2 = 1\}$.

EXERCICE C.9. Construire un espace connexe par arcs dont le groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$; à $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2$; à $\mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2$.

EXERCICE C.10.

- (1) Montrer que le groupe libre à n générateurs est dénombrable.
- (2) On considère le compact $C = \cup_{n \geq 1} C_n$ où C_n est le cercle de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, construire un morphisme surjectif $\pi_n : \pi_1(C, (0, 0)) \rightarrow \pi_1(C_n, (0, 0))$
- (3) Montrer que $\pi_1(C, (0, 0))$ n'est pas dénombrable.

EXERCICE C.11. On fixe $n \geq 4$. Soient N et S les pôles nord et sud de la sphère euclidienne S^{n-1} de \mathbb{R}^n , $U := \mathbb{R}^n \setminus S$. Pour tout vecteur $x \in U$ on appelle $r(x)$ la rotation qui envoie N sur x et fixe le plan orthogonal à la droite engendrée par N et x .

- (1) Montrer que l'application

$$U \times \mathrm{SO}(n-1) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$$

$$(x, A) \mapsto r(x) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un homéomorphisme.

- (2) Calculer $\pi_1(\mathrm{SO}(n), \mathrm{id})$.

EXERCICE C.12. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel complexe des 1-formes différentielles holomorphes sur la sphère de Riemann ou sur une courbe elliptique est bien égale à son genre.

EXERCICE C.13.

- (1) Montrer que la seule surface de Riemann S pour laquelle il existe une application holomorphe non constante $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow S$ est la sphère de Riemann.
- (2) On fixe un réseau Λ du plan complexe. Montrer que le quotient d'une courbe elliptique \mathbb{C}/Λ par l'involution $\sigma(z) = -z$ est biholomorphe à la sphère de Riemann.

Index

- action
 - de groupe, 31
 - fidèle, 32
 - holomorphe, 32
 - libre, 31
 - proprement discontinue, 32, 65
 - transitive, 31
- application
 - analytique, 9
 - conforme, 9
 - cylindre d'une, 60
 - holomorphe, 19
 - univalente, 19
- atlas holomorphe, 17
- bande de Möbius, 67
- biholomorphisme, 19
 - local, 13
- carte holomorphe, 18
- chemin, 45
 - reparamétrisation d'un, 47
- correspondance de Galois, 72, 74, 78
- courbe elliptique, 23
- espace topologique
 - localement connexe par arcs, 68
 - pointé, 47
 - semi-localement simplement connexe, 69
 - simplement connexe, 49
 - somme pointée d'une paire de, 60
- fonction
 - holomorphe, 10
 - méromorphe, 14
- forme différentielle holomorphe, 111
- groupe
 - abélianisé d'un, 92
 - dérivé, 29
 - de présentation finie, 93
 - de type fini, 93
 - fondamental, 47
 - libre, 91
 - produit amalgamé, 93
 - produit libre, 92
- homotopie, 45
 - équivalence de, 61
 - libre, 46
- lacet, 27, 47
- orbite, 31
- ouvert de trivialisatation, 62
- principe des zéros isolés, 13
- rétract/rétraction, 59
 - par déformation, 59
- revêtement, 62
 - base du, 62
 - connexe, 63
 - fini, 63
 - galoisien, 66
 - induit, 63
 - isomorphisme de, 66
 - morphisme de, 69
 - produit, 64
 - trivial, 63
 - universel, 69
- singularité essentielle, 14
- sphère de Riemann, 21
- stabilisateur, 35
- surface de Riemann, 17, 18
 - caractéristique d'Euler-Poincaré, 106
 - genre d'une, 91
 - simplement connexe, 27

Théorème

- d'uniformisation, 27, 77
 - de Borsuk-Ulam, 56
 - de Brouwer, 55
 - de l'invariance de la dimension, 57
- topologie quotient, 31
- triangulation, 97
- analytique, 101